UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

Perturbaciones Cosmológicas en Teorías de Gravedad Escalar-Tensor

---

Autor:
Joel José VELÁSQUEZ CELIS

Director:
Dr. Leonardo CASTAÑEDA

Tesis sometida como requisito parcial
para optar al grado de Magister en Ciencias Físicas

en la

Facultad de Ciencias
Departamento de física, sede Bogotá

3 de Abril del 2018

Universidad Nacional de Colombia

Resumen

Facultad de Ciencias
Departamento de física, sede Bogotá

Magister en Ciencias Físicas

Perturbaciones Cosmológicas en Teorías de Gravedad Escalar-Tensor

by Joel José VELÁSQUEZ CELIS

Motivados por el creciente auge de estudios en teorías de Gravedad Modificada (TGM), se estudian las teorías de Brans-Dicke, Escalar-Tensor y $f(R)$, las cuales son un grupo de estas modificaciones de la Relatividad General. En el presente trabajo, se hallan, las ecuaciones de campo, las ecuaciones Friedmann para un universo homogéneo e isotrópico y las perturbaciones cosmológicas para cada una de las teorías anteriormente expuestas. Además de hallar las perturbaciones cosmológicas en forma general, se calculan éstas para un universo de dominio de materia, encontrando así las ecuaciones tipo Poisson para las teorías de gravedad Escalar-Tensor y $f(R)$. Luego, se muestran las equivalencias entre las teorías de gravedad Escalar-Tensor y $f(R)$, en todos los desarrollos que se hicieron a lo largo de la tesis. Por último, se muestra como calcular los potenciales partiendo de dos ejemplos específicos de $f(R)$, los cuales son, el modelo de Starobinsky y el modelo de Hu-Sawicki, encontrando así, todas las equivalencias entre las teorías.

Universidad Nacional de Colombia

Abstract

Facultad de Ciencias
Departamento de física, sede Bogotá

Magister en Ciencias Físicas

Perturbaciones Cosmológicas en Teorías de Gravedad Escalar-Tensor

by Joel José VELÁSQUEZ CELIS

Motivated by the growing rise of studies in theories of Modified Gravity (TGM), the theories of Brans-Dicke, Scalar-Tensor and $f(R)$ are studied, which are a group of these modifications of General Relativity. In the present work, we find, the field equations, the Friedmann equations for a homogeneous and isotropic universe and the cosmological perturbations for each of the theories previously exposed. In addition to finding the cosmological perturbations in a general way, these are calculated for a domain of matter domain, thus finding the Poisson equations for the Scalar-Tensor and $f(R)$ gravity theories. Then, the equivalences between the Scalar-Tensor and $f(R)$ gravity theories are shown in all the developments that were made throughout the thesis. Finally, we show how to calculate the potentials from two specific examples of $f(R)$, which are, the Starobinsky model and the Hu-Sawicki model, finding all the equivalences between the theories.

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo del profesor y director de tesis Leonardo Castañeda. Le agradezco por compartir sus amplios conocimientos, por sus enseñanzas (no solo académicas), por los momentos de seminario, los cuales fueron claves para la realización de este trabajo, pero por sobretodo por ser mi amigo. Reitero una vez mas mi agradecimiento profesor.

Le agradezco a mis compañeros y amigos del grupo de investigación Gravitación y Cosmología con especial mención a Hector Javier, Leandro, Oscar, Mauricio. Gracias a todos los integrantes por sus ayudas y colaboraciones académicas.

Le agradezco a la persona que es mi compañera de vida, por ayudarme, aguantarme, y siempre apoyarme Gicel Karina López. Sin ti, no estuviera donde estoy. Gracias por levantarme cuando estaba caído. No caben las palabras de agradecimiento para ti.

Le agradezco a mi madre Matilde por ser tan especial conmigo, por estar en todas, porque siempre me ha apoyado sin importar las dificultades. A mi hermana Glenda y mi sobrino Pablo. A Kiddo por acompañarme en todos los momentos de estudio y sacarme tantas risas. A Josué David y mi sobrina Victoria.

Le agradezco a Javier Sarmiento por ser amigo y compartir tantos momentos. A José Alejandro Velándia, que es un hermano, gracias y muchas gracias por apoyarme en todas, por siempre escucharme y por tus comentarios a veces tan absurdos. Gracias Sabina, porque tus canciones me han acompañado y reconfortado a lo largo de mi vida.

Índice

Acrónimos

BD	**B**rans **D**icke
RG	**R**elatividad **G**eneral
ST	**E**scalar **T**ensor (Por sus siglas en ingles)
TGM	**T**eorías de **G**ravedad **M**odificada
FLRW	**F**riedmann **L**emaitre **R**obertson **W**alker
CMB	**R**adiación **C**ósmica de **F**ondo (Por sus siglas en ingles)
GYH	**G**ibbons-**Y**ork-**H**awking

Notaciones y convenciones

En esta tesis se usará la signatura de la métrica $(- + ++)$, la velocidad de la luz se toma en unidades geométricas $c = 1$, la constate de Gravitación universal se toma $G = 1$. Los índices latinos $a, b, \ldots$ representan las componentes espacio-temporales y van de 0 a 3, los índices griegos $\alpha, \beta, \ldots$ representan las componentes para las coordenadas espaciales y van de 1 a 3.

Dedicado a ***Gicel Karina López González***

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) fue dada por Albert Einstein en 1915. A partir de esta fecha, el entendimiento de nuestro universo ha tenido una transformación profunda. A pesar de que la Relatividad General se ha mostrado consistente con los datos conocidos [1, 2], cada vez hay mas indicios de sus limitaciones. La idea de modificar la teoría de RG no es actual. La primera modificación fue introducida por Weyl en 1919 incluyendo invariantes adicionales de orden superior en la acción de Einstein-Hilbert además del escalar Ricci [3]. Es importante destacar, que estas modificaciones fueron introducidas por motivación teórica mas no por evidencia experimental. El primer indicio que hay de que la RG no es la teoría final de la gravedad es cuando se mostró que la teoría no es renormalizable [4, 5].

Las últimas observaciones del CMB y de las supernovas tipo I revelan que el universo está compuesto por 23% de materia oscura, 73% de energía oscura y, por lo tanto, solo el 4% de la energía del universo está en forma de materia bariónica [6, 7]. La materia oscura se refiere a formas desconocidas de materia que tienen las mismas propiedades de agrupamiento de la materia ordinaria, mientras que la energía oscura se refiere a una forma desconocida de energía que no se agrupa.

La materia oscura ha sido detectada indirectamente por el estudio de lentes gravitacionales o las curvas de rotación de las galaxias [8]. La energía oscura exhibe características repulsivas y es responsable por la expansión acelerada actual del universo [9, 10].

El modelo más simple que se acomoda con los datos observacionales es el modelo Λ-Cold Dark Matter (ΛCDM). Sin embargo, este modelo no explica el origen de la materia oscura ni el de energía oscura y deja sin respuesta los problemas de la constante cosmológica [11, 12].

Asumiendo que la RG no es del todo correcta a escalas cosmológicas, es posible que no se necesite el término de constante cosmológica para dar explicación a la expansión acelerada del universo. Por lo tanto, es plausible considerar una modificación a la teoría.

Existen varias maneras de modificar la teoría de Einstein. Una manera, es la teoría propuesta por Brans y Dicke en 1961 [13, 14], donde se considera un campo escalar acoplado no minimalmente al escalar de curvatura de Ricci. Otras propuestas son las teorías de gravedad Escalar-Tensor (ST) (ver el review [15] y las referencias allí citadas), las cuales generalizan la teoría de Brans-Dicke (funciones del campo escalar). Otra manera de modificar la RG es reemplazar en la acción de Einstein-Hilbert el escalar de Ricci R, a través, de una función de este escalar, $f(R)$ [16].

El presente trabajo se divide en 5 partes: en la parte inicial se hallan las ecuaciones de campo partiendo de la acción de cada teoría, RG, Brans-Dicke (BD), ST y $f(R)$. Como resultado propio del presente trabajo se muestra como el término de frontera se cancela con el término de Gibbons-York-Haawking (GYH). En la segunda parte se construye el modelo cosmológico estándar homogéneo e isotrópico para cada una de las teorías expuestas anteriormente. En la tercera parte se desarrollan las ecuaciones de campo perturbadas a primer orden en el gauge de Newton conforme para las teorías RG, BD, ST y $f(R)$. En la cuarta parte, se toman las expresiones generales de las perturbaciones y se hace la consideración para un universo dominado por la materia, luego se realiza la aproximación sub-horizonte y se hallan las ecuaciones bajo este régimen. En la última parte, se muestran las equivalencias (en la acción, en las ecuaciones de campo, en las ecuaciones de Friedmann de background y perturbadas) entre la teorías de gravedad ST y $f(R)$. Además de lo hallado en forma general, se toman como ejemplo dos modelos específicos de $f(R)$ (Starobinsky y Hu-Sawicki). Es importante resaltar que los detalles mostrados en las equivalencias de Friedmann de background y perturbadas entre las teorías anteriormente mencionadas son resultados propios.

Capítulo 2

Ecuaciones de Campo y Principios Variacionales

En el presente capítulo se deducen las ecuaciones de campo de RG, así como, para las teorías de gravedad modificada (TGM), BD, ST y $f(R)$.
Estas ecuaciones se encontrarán a partir de un principio variacional $\delta S = 0$, siendo S la acción. Cada cálculo se realiza introduciendo el término de frontera de GYH, para así evitar asunciones extras sobre la variación de la métrica y el campo escalar en la frontera.
En el presente capítulo también se mostrará como las ecuaciones de campo de las TGM, se relacionan con las ecuaciones de campo de RG.

2.1 Relatividad General

Las ecuaciones de campo de RG se pueden encontrar mediante un principio variacional. La acción que permite esto es [17]

$$S^{(RG)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}R + S^{(m)}(g_{ab},\psi), \tag{2.1}$$

el primer término es conocido como la acción de Einstein-Hilbert, donde $d^4x\sqrt{-g}$ es el elemento de volumen invariante y R el escalar de Ricci.
El segundo término es la acción de los campos de materia, la cual está dada por

$$S^{(m)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)}(g_{ab},\psi), \tag{2.2}$$

donde ψ denota todos los campos de materia.
Para obtener las ecuaciones de campo de Einstein desde un principio variacional se varía la acción respecto a g^{ab}, obteniendo así

$$\delta S^{(RG)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\delta(\sqrt{-g}R) + \delta S^{(m)}. \tag{2.3}$$

Los siguientes resultados se usarán a lo largo del cálculo [17, 18]

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}, \qquad \delta g^{ab} = -g^{ac}g^{bd}\delta g_{cd}, \tag{2.4}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}, \qquad \delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}\delta g_{ab} \tag{2.5}$$

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta\Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b(\delta\Gamma^c{}_{ac}). \tag{2.6}$$

La variación del escalar de Ricci es [18]

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} = \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} (\nabla_c (\delta \Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b (\delta \Gamma^c{}_{ac})) \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + \nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ac}),\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde se ha utilizado la compatibilidad métrica, $\nabla_c g_{ab} \equiv 0$.
Se procede a calcular el término $\delta(\sqrt{-g}R)$ haciendo uso de la ecuación (2.5)

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}R) &= \sqrt{-g}\delta R + R\delta\sqrt{-g} \\ &= \sqrt{-g}\big(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R\big) \delta g^{ab} + \sqrt{-g}\big(\nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ac})\big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Reemplazando la expresión anterior en (2.3) se tiene

$$\begin{aligned}\delta S^{(RG)} = & \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \big(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R\big) \delta g^{ab} \\ & + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_d \big(g^{ab} \delta \Gamma^d{}_{ab} - g^{ad} \delta \Gamma^c{}_{ac}\big) + \delta S^{(m)},\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos.
Se analiza el término de divergencia (segunda integral) de la ecuación anterior

$$\delta S_B^{(RG)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_d V^d \tag{2.10}$$

donde

$$V^d = g^{ab} \delta \Gamma^d{}_{ab} - g^{ad} \delta \Gamma^c{}_{ac}. \tag{2.11}$$

Utilizando el teorema de Gauss-Stokes [17, 18]

$$\int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{|g|} \nabla_d A^d = \oint_{\partial \mathcal{M}} d^{n-1} y \epsilon \sqrt{|h|} n_d A^d, \tag{2.12}$$

donde $\partial\mathcal{M}$ es la frontera de un hipervolumen en $\mathcal{M}$, h es el determinante de la métrica inducida, n_d es un vector normal unitario a $\partial\mathcal{M}$, ϵ es $+1$ si $\partial\mathcal{M}$ es como de tiempo y -1 si $\partial\mathcal{M}$ es como de espacio (se asume que $\partial\mathcal{M}$ no es nulo en alguna parte). Las coordenadas x^a son usadas para la región finita en $\mathcal{M}$ y y^a para la frontera $\partial\mathcal{M}$.
Reemplazando el teorema de Gauss-Stokes en (2.10) se puede escribir el término de frontera como

$$\delta S_B^{(RG)} = \oint_{\partial \mathcal{M}} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} n_d V^d. \tag{2.13}$$

Para calcular las variaciones en los símbolos de Christoffel ($\Gamma^a{}_{bc}$) que aparecen en el término de V^d, se debe tener en cuenta que se está trabajando en una variedad libre de torsión. Los símbolos de Christoffel son [18]

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}), \tag{2.14}$$

obteniendo

$$\delta \Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} \delta g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}). \tag{2.15}$$

Para encontrar la variación de la acción se fija la siguiente condición [17, 19]

$$\delta g_{ab}\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \tag{2.16}$$

esto es, la variación del tensor métrico se anula en la frontera $\partial\mathcal{M}$. Por lo cual, la variación (2.15) da

$$\delta\Gamma^a{}_{bc}\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b\delta g_{dc} + \partial_c\delta g_{bd} - \partial_d\delta g_{bc}), \tag{2.17}$$

y

$$V^d\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2}g^{ab}g^{dc}(\partial_a\delta g_{cb} + \partial_b\delta g_{ac} - \partial_c\delta g_{ab}) - \frac{1}{2}g^{ad}g^{cb}\partial_a\delta g_{bc}, \tag{2.18}$$

como $V_d = g_{ed}V^e$, entonces

$$\begin{aligned} V_d\Big|_{\partial\mathcal{M}} &= \frac{1}{2}g^{ab}\delta^c{}_d(\partial_a\delta g_{cb} + \partial_b\delta g_{ac} - \partial_c\delta g_{ab}) - \frac{1}{2}\delta^a{}_d g^{cb}\partial_a\delta g_{bc} \\ &= g^{ab}(\partial_b\delta g_{da} - \partial_d\delta g_{ba}). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Se evalúa el término $n^dV_d|_{\partial\mathcal{M}}$, usando para esto que

$$g^{ab} = h^{ab} + \epsilon n^a n^b, \tag{2.20}$$

entonces

$$\begin{aligned} n^dV_d|_{\partial\mathcal{M}} &= n^d(h^{ab} + \epsilon n^a n^b)(\partial_b\delta g_{da} - \partial_d\delta g_{ba}) \\ &= n^d h^{ab}(\partial_b\delta g_{da} - \partial_d\delta g_{ba}), \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde se ha usado el hecho de la parte antisimétrica de $\epsilon n^a n^b$ con $\epsilon = n^d n_d = \pm 1$. Ahora, como $\delta g_{ab} = 0$ en la frontera, entonces $h^{ab}\partial_b\delta g_{da} = 0$ [17], obteniendo

$$n^dV_d|_{\partial\mathcal{M}} = -n^d h^{ab}\partial_d\delta g_{ba}, \tag{2.22}$$

con lo cual (2.13) queda

$$\delta S_B^{(RG)} = -\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^d h^{ab}\partial_d\delta g_{ba}. \tag{2.23}$$

Por lo tanto, la variación de la acción (2.9) queda

$$\begin{aligned} \delta S^{(RG)} = &\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\big(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\big)\delta g^{ab} \\ &- \frac{1}{16\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^d h^{ab}\partial_d\delta g_{ba} + \delta S^{(m)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

La ecuación anterior muestra que si se fija $\delta g_{ab} = 0$ en $\partial\mathcal{M}$ existe un término de frontera adicional. La mayoría de la literatura anula tal término argumentando flujos nulos en el infinito; otro argumento es el de fijar tanto la variación de la métrica como su primera derivada sean nulas sobre la frontera, es decir, $\delta g_{ab} = 0$ y $\partial_c\delta g_{ab} = 0$. Aunque este último argumento nos conduce directamente a las ecuaciones de campo de Einstein (pues la contribución en la frontera es automáticamente cero), implica fijar dos condiciones en la variación. Para evitar esto, Gibbons, York y Hawking introdujeron un término de frontera que permite tener un problema variacional bien definido con solo $\delta g_{ab} = 0$, a este término se le conoce como término de frontera de

Gibbons-York-Hawking (GYH) [20, 21], el cual está dado por

$$S_{GYH}^{(RG)} = \frac{1}{8\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}K \tag{2.25}$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca sobre la frontera $\partial\mathcal{M}$.
La variación de la ecuación anterior es

$$\delta S_{GYH}^{(RG)} = \frac{1}{8\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}\delta K, \tag{2.26}$$

donde $\delta h^{ab} = 0$ en $\partial\mathcal{M}$.
La curvatura extrínseca está definida por [17]

$$K_{ab} = h_a^{\ c}\nabla_c n_b, \tag{2.27}$$

por lo cual, la traza de la curvatura extrínseca es

$$\begin{aligned}
K &= \nabla_a n^a = g^{ab}\nabla_b n_a \\
&= (h^{ab} + \epsilon n^a n^b)\nabla_b n_a \\
&= h^{ab}\nabla_b n_a && (2.28)\\
&= h^{ab}(\partial_b n_a - \Gamma^c{}_{ba} n_c). && (2.29)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.17) se calcula δK sobre la frontera,

$$\begin{aligned}
\delta K &= -h^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ba} n_c \\
&= -\frac{1}{2}h^{ab}g^{dc}(\partial_b\delta g_{da} + \partial_a\delta g_{bd} - \partial_d\delta g_{ba})n_c \\
&= -\frac{1}{2}h^{ab}(\partial_b\delta g_{da} + \partial_a\delta g_{bd} - \partial_d\delta g_{ba})n^d \\
&= \frac{1}{2}h^{ab}\partial_d\delta g_{ba} n^d, && (2.30)
\end{aligned}$$

ya que $h^{ab}\partial_b\delta g_{da} = 0$ y $h^{ab}\partial_a\delta g_{bd} = 0$. La variación (2.26) queda

$$\delta S_{GYH}^{(RG)} = \frac{1}{16\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}h^{ab}\partial_d\delta g_{ba} n^d. \tag{2.31}$$

Este término se cancela con la segunda integral de (2.24) (el término de la contribución de la frontera), con lo cual se tiene

$$\delta S^{(RG)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R)\delta g^{ab} + \delta S^{(m)}. \tag{2.32}$$

Haciendo la variación de la acción (2.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\delta S^{(m)} &= \int_{\mathcal{M}} d^4x\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}^{(m)}}{\partial g^{ab}}\delta g^{ab}\sqrt{-g} + \mathcal{L}^{(m)}\delta\sqrt{-g}\right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}^{(m)}}{\partial g^{ab}} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{(m)}g_{ab}\right)\delta g^{ab}, && (2.33)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación (2.5).
Definiendo el tensor momentum-energía como [22]

$$T_{ab} \equiv -2\frac{\partial \mathcal{L}^{(m)}}{\partial g^{ab}} + \mathcal{L}^{(m)} g_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{(m)}}{\delta g^{ab}}, \tag{2.34}$$

entonces

$$\delta S^{(m)} = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} T_{ab} \delta g^{ab}. \tag{2.35}$$

Imponiendo que las variaciones permanezcan invariantes respecto a δg^{ab}, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{(RG)}}{\delta g^{ab}} = 0, \tag{2.36}$$

obteniendo finalmente las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \tag{2.37}$$

Definiendo el tensor de Einstein como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}, \tag{2.38}$$

se tiene

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}. \tag{2.39}$$

2.2 Teoría de Brans-Dicke

La teoría de Jordan-Fierz-Brans-Dicke de la gravedad, comúnmente referida como la teoría de Brans-Dicke (BD) es el prototipo de las teorías gravitacionales alternativas a Relatividad General.
La motivación inicial para la teoría BD fue dada por Pascual Jordan, él cambió la constante gravitacional G por un campo escalar variable [23]. Brans y Dicke tomaron esta idea de Jordan y publicaron su teoría en 1961 [13, 14], donde un campo escalar describe la gravedad junto con el tensor métrico.
La acción en el marco de Jordan[1] es [25, 26]

$$S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - V(\phi)\right] + S^{(m)} \tag{2.40}$$

donde $S^{(m)}$ es la acción (2.2) que describe materia ordinaria (cualquier forma de materia diferente al campo escalar ϕ), ω es un parámetro adimensional de la teoría. cabe anotar que la materia no está acoplada directamente a ϕ, ya que $\mathcal{L}^{(m)}$ no depende de ϕ, sino que el campo de BD está acoplado directamente al escalar de Ricci.
El campo gravitacional está descrito por el tensor métrico g_{ab} y por el campo escalar ϕ de BD, estos, junto con las variables de materia describen la dinámica. El potencial del campo escalar $V(\phi)$ constituye una generalización natural de la constante cosmológica.

[1] En el marco de Jordan, el campo escalar está acoplado no minimalmente al escalar de Ricci R. Para mayor detalle sobre este marco ver [24]

2.2.1 Variación de la acción respecto a la métrica

La variación de (2.40) respecto a δg^{ab} da

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =& \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\delta(\sqrt{-g})\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi - V(\phi)\right] \\ &+ \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\delta R - \frac{\omega}{\phi}\delta(g^{cd})\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right] + \delta S^{(m)}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2.5) y (2.7) se tiene

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =& \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}\right)\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi - V(\phi)\right] \\ &+ \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab}\right) - \nabla_b\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ac}\right)\right)\right. \\ &\left. - \frac{\omega}{\phi}\delta(g^{cd})\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right] + \delta S^{(m)}, \end{aligned}$$

agrupando y factorizando los términos con δg^{ab} se tiene

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =& \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right) + \frac{1}{2}g_{ab}V(\phi)\right. \\ &\left. - \frac{\omega}{\phi}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right)\right]\delta g^{ab} \\ &+ \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\phi\left[\nabla_c\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab}\right) - \nabla_b\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ac}\right)\right] + \delta S^{(m)}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Analizando la segunda integral

$$\delta S_B^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\phi\left[\nabla_c\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab}\right) - \nabla_b\left(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ac}\right)\right], \tag{2.43}$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$\delta S_B^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\phi\nabla_d\left(g^{ab}\delta\Gamma^d{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^c{}_{ac}\right). \tag{2.44}$$

El término entre paréntesis es (ver apéndice A)

$$g^{ab}\delta\Gamma^d{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^c{}_{ac} = g_{ef}\nabla^d\delta g^{ef} - \nabla_c\delta g^{dc}. \tag{2.45}$$

Reemplazando este resultado en (2.44) se tiene:

$$\delta S_B^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\phi\nabla_d\left(g_{ef}\nabla^d\delta g^{ef} - \nabla_c\delta g^{dc}\right).$$

Usando el hecho de la compatibilidad métrica ($\nabla_c g_{ab} = 0$) se tiene

$$\delta S_B^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\phi g_{ef}\nabla_d\nabla^d\delta g^{ef} - \phi\nabla_d\nabla_c\delta g^{dc}\right).$$

Utilizando la definición del operador D'Alembertiano

$$\Box \equiv \nabla_d\nabla^d, \tag{2.46}$$

entonces

$$\delta S_B^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\phi g_{ef}\Box\delta g^{ef} - \phi\nabla_e\nabla_f\delta g^{ef}\right). \tag{2.47}$$

La integral anterior se puede reescribir de forma diferente, realizando para esto una integración por partes. Con lo cual, se definen las siguientes cantidades

$$M_c = \phi g_{ef}\nabla_c(\delta g^{ef}) - (\delta g^{ef})g_{ef}\nabla_c\phi \tag{2.48}$$

y

$$N^c = \phi\nabla_f(\delta g^{cf}) - (\delta g^{cf})\nabla_f\phi, \tag{2.49}$$

con lo cual el término entre paréntesis se convierte en (ver apéndice B)

$$\phi g_{ef}\Box\delta g^{ef} - \phi\nabla_c\nabla_f\delta g^{cf} = \delta g^{ef}(g_{ef}\Box\phi - \nabla_e\nabla_f\phi) + (\nabla^c M_c - \nabla_c N^c), \tag{2.50}$$

así que (2.47) queda

$$\begin{aligned}\delta S_B^{(BD)} = &\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ef}(g_{ef}\Box\phi - \nabla_e\nabla_f\phi)\\ &+\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(\nabla^c M_c - \nabla_c N^c).\end{aligned} \tag{2.51}$$

La variación de la acción (2.44) queda

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =&\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right) + \frac{1}{2}g_{ab}V(\phi)\right.\\ &\left.-\frac{\omega}{\phi}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right) + (g_{ab}\Box\phi - \nabla_a\nabla_b\phi)\right]\delta g^{ab}\\ &+\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(\nabla^c M_c - \nabla_c N^c) + \delta S^{(m)}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Usando el teorema de Gauss-Stokes (2.12) en el término de divergencia se tiene

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =&\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right) + \frac{1}{2}g_{ab}V(\phi)\right.\\ &\left.-\frac{\omega}{\phi}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right) + (g_{ab}\Box\phi - \nabla_a\nabla_b\phi)\right]\delta g^{ab}\\ &+\frac{1}{16\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n^c M_c - \frac{1}{16\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n_c N^c + \delta S^{(m)}.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Se evalúan los términos M_c y N^c en la frontera

$$\begin{aligned}M_c\Big|_{\partial\mathcal{M}} &= \phi g_{ef}\nabla_c\delta g^{ef}\\ &= \phi g_{ef}\nabla_c(-g^{ae}g^{bf}\delta g_{ab})\\ &= -\phi\delta^a_f g^{bf}\partial_c\delta g_{ab}\\ &= -\phi g^{ba}\partial_c\delta g_{ab}\end{aligned} \tag{2.54}$$

y

$$N^c\Big|_{\partial\mathcal{M}} = -\phi g^{ac}g^{bf}\partial_f\delta g_{ab}. \tag{2.55}$$

Se ha cambiado $\nabla \to \partial$, ya que

$$\nabla_c \delta g_{ab} = \partial_c \delta g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} \delta g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} \delta g_{ad}, \tag{2.56}$$

pero las variaciones de la métrica son cero en la frontera.
Ahora se calculan los términos que aparecen en las integrales sobre la frontera.
Usando (2.20) se calcula

$$n^c M_c \Big|_{\partial\mathcal{M}} = -\phi n^c (h^{ab} + \epsilon n^a n^b) \partial_c \delta g_{ab} = -\phi n^c h^{ab} \partial_c \delta g_{ab} \tag{2.57}$$

y

$$\begin{aligned} n_c N^c \Big|_{\partial\mathcal{M}} &= -\phi n_c (h^{ac} + \epsilon n^a n^c)(h^{bf} + \epsilon n^b n^f) \partial_f (\delta g_{ab}) \\ &= -\phi n^a h^{bf} \partial_f (\delta g_{ab}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde se ha usado el hecho que $n_c h^{ac} = 0$, $\epsilon^2 = 1$ y que la derivada tangencial $h^{bf} \partial_f (\delta g_{ab})$ se anula [17].
Por tanto, la variación de la acción (2.53) toma la forma

$$\begin{aligned} \delta S^{(BD)} =& \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[\phi \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \frac{1}{2} g_{ab} V(\phi) \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{\phi} \left(\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi \right) + (g_{ab} \Box \phi - \nabla_a \nabla_b \phi) \right] \delta g^{ab} \\ & - \frac{1}{16\pi} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon \phi n^c h^{ab} \partial_c (\delta g_{ab}) + \delta S^{(m)}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

La última integral se puede eliminar argumentando que además de la variación de la métrica, su primera derivada se anula en la frontera [27](como la mayoría de textos lo utilizan para RG [18, 22]). En cambio, se utiliza el término de frontera tipo GYH para BD [28, 29]

$$S^{(BD)}_{GYH} = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon \phi K. \tag{2.60}$$

La variación de este término respecto a δg^{ab}

$$\delta S^{(BD)}_{GYH} = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon \phi \delta K, \tag{2.61}$$

teniendo en cuenta (2.30), la ecuación anterior queda

$$\delta S^{(BD)}_{GYH} = \frac{1}{16\pi} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon \phi n^c h^{ab} \partial_c \delta g_{ab}. \tag{2.62}$$

El término GYH cancela con la segunda integral de (2.59).
Teniendo en cuenta (2.35) la variación de la acción de BD respecto a la métrica queda

$$\begin{aligned}\delta S^{(BD)} =& \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R\right)+\frac{1}{2}g_{ab}V(\phi)\right.\\ &\left.-\frac{\omega}{\phi}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi-\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right)+\left(g_{ab}\Box\phi-\nabla_a\nabla_b\phi\right)\right]\delta g^{ab}\\ &-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}T^{(m)}_{ab}\delta g^{ab}\end{aligned} \tag{2.63}$$

Imponiendo que ésta variación sea estacionaria, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{(BD)}}{\delta g^{ab}} = 0, \tag{2.64}$$

entonces

$$\begin{aligned}&\phi\left(R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R\right)-\frac{\omega}{\phi}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi-\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right)\\ &+\left(g_{ab}\Box\phi-\nabla_a\nabla_b\phi\right)+\frac{1}{2}g_{ab}V(\phi)-8\pi T^{(m)}_{ab}=0\end{aligned}$$

Como $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$, tenemos finalmente la siguiente ecuación de campo

$$\boxed{\begin{aligned}G_{ab} =& \frac{8\pi}{\phi}T^{(m)}_{ab}+\frac{\omega}{\phi^2}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi-\frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right)\\ &+\frac{1}{\phi}\left(\nabla_a\nabla_b\phi-g_{ab}\Box\phi\right)-\frac{V(\phi)}{2\phi}g_{ab}.\end{aligned}} \tag{2.65}$$

La traza de las ecuaciones de campo es (ver Apéndice C)

$$R = -\frac{8\pi}{\phi}T^{(m)}+\frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi+\frac{3\Box\phi}{\phi}+\frac{2V}{\phi}. \tag{2.66}$$

El lado izquierdo de la ecuación de campo (2.65) es el tensor de Einstein. El primer término del lado derecho es el término de fuente usual de la teoría de la relatividad general, pero con el parámetro de acoplo ϕ^{-1}. Por tanto, las ecuaciones de movimiento de una masa en una métrica dada son las mismas que en RG (La ecuación de la geodésica es la misma que en RG [30]). El segundo término es el tensor momentum-energía del campo escalar acoplado también con ϕ^{-1} (el tensor momentum-energía para un campo escalar es $T^{(\phi)}_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi$). El tercer término proviene de la presencia de segundas derivadas del tensor métrico y el último término es el del potencial del campo escalar.

2.2.2 Variación de la acción respeto al campo escalar

La variación de la acción de BD (2.40) respecto a $\delta\phi$ es

$$\delta S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[R\delta\phi-\delta\left(\frac{\omega}{\phi}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi\right)-\delta V(\phi)\right]. \tag{2.67}$$

Como el escalar de Ricci no depende del campo escalar, no hay variación respecto a éste. El término entre paréntesis se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\frac{\omega}{\phi}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) &= \delta\left(\frac{\omega}{\phi}\right)\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \frac{\omega}{\phi}\delta\left(\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) \\
&= \left(-\frac{\omega}{\phi^2}\delta\phi\right)\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \frac{\omega}{\phi}\left((\delta\nabla^c\phi)\nabla_c\phi + \nabla^c\phi(\delta\nabla_c\phi)\right) \\
&= -\frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\delta\phi + \frac{2\omega}{\phi}\nabla^c\phi\nabla_c(\delta\phi).
\end{aligned} \tag{2.68}
$$

Además, teniendo en cuenta que $\delta V(\phi) = \dfrac{dV}{d\phi}\delta\phi$, la variación de la acción de BD (2.67) queda

$$
\begin{aligned}
\delta S^{(BD)} = &\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(R + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi - \frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi \\
&- \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{2\omega}{\phi}\nabla^c\phi\nabla_c(\delta\phi)\right).
\end{aligned} \tag{2.69}
$$

Ya que

$$
\begin{aligned}
\nabla_c\left(\delta\phi\nabla^c\phi\right) &= \nabla_c(\delta\phi)\nabla^c\phi + \delta\phi\nabla_c\nabla^c\phi \\
&= \nabla_c(\delta\phi)\nabla^c\phi + \delta\phi\Box\phi
\end{aligned}
$$

se obtiene

$$
\nabla^c\phi\nabla_c(\delta\phi) = \nabla_c\left(\delta\phi\nabla^c\phi\right) - \delta\phi\Box\phi, \tag{2.70}
$$

reemplazando la ecuación anterior en (2.69) y agrupando términos se tiene

$$
\begin{aligned}
\delta S^{(BD)} = &\frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(R + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \frac{2\omega}{\phi}\Box\phi - \frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi \\
&- \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{2\omega}{\phi}\nabla_c(\delta\phi\nabla^c\phi)\right).
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

Para resolver la segunda integral, se define la siguiente cantidad

$$
L^c = \frac{\omega}{\phi}\nabla^c\phi\delta\phi \tag{2.72}
$$

Calculando la derivada covariante de L^c se llega a

$$
\begin{aligned}
\nabla_c L^c &= \nabla_c\left(\frac{\omega}{\phi}\right)\nabla^c\phi\delta\phi + \frac{\omega}{\phi}\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi) \\
&= \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\omega}{\phi}\right)\nabla_c\phi\nabla^c\phi\delta\phi + \frac{\omega}{\phi}\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi) \\
&= -\frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\delta\phi + \frac{\omega}{\phi}\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi),
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\frac{\omega}{\phi}\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi) = \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\delta\phi + \nabla_c L^c. \tag{2.73}
$$

El término obtenido anteriormente es el que aparece entre paréntesis en la variación de la acción de BD (2.71). Haciendo el reemplazo se obtiene

$$\delta S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \frac{2\omega}{\phi}\Box\phi - \frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi$$
$$- \frac{2}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_c L^c. \tag{2.74}$$

Aplicando el teorema de Gauss-Stokes al término de divergencia se tiene

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_c L^c = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n_c L^c = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n_c\left(\frac{\omega}{\phi}\nabla^c\phi\delta\phi\right). \tag{2.75}$$

Se impone que la variación del campo escalar en la frontera sea nulo

$$\delta\phi\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \tag{2.76}$$

La variación de la acción queda

$$\delta S^{(BD)} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \frac{2\omega}{\phi}\Box\phi - \frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi. \tag{2.77}$$

Es importante resaltar que la variación del término de GYH respecto a $\delta\phi$ es cero, debido a la imposición de $\delta\phi$ en la frontera.
Imponiendo que esta variación sea estacionaria, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{(BD)}}{\delta\phi} = 0, \tag{2.78}$$

obteniendo así la ecuación de campo

$$\boxed{\frac{2\omega}{\phi}\Box\phi + R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0.} \tag{2.79}$$

reemplazando (2.66) en la ecuación anterior para eliminar el término de R se llega a

$$\boxed{\Box\phi = \frac{1}{2\omega+3}\left(8\pi T^{(m)} + \phi\frac{dV}{d\phi} - 2V\right)}. \tag{2.80}$$

La teoría de BD es indistinguible de la RG cuando $\omega \to \infty$ para $T^{(m)} \neq 0$. En este límite el campo escalar de BD presenta el comportamiento asintótico $\phi = \phi_0 + O(\frac{1}{\sqrt{\omega}})$, donde ϕ_0 es constante [25, 31].

2.3 Teorías de Gravedad Escalar-Tensor

Las teorías de gravedad Escalar-Tensor (ST) generalizan la teoría de BD, ya que ahora el parámetro ω es función del escalar de BD al igual que la función f mostrada en la acción.
La teoría más general de ST fue encontrada por Horndeski [32], donde la lagrangiana $\mathcal{L}$ puede ser función de $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\nabla_a\nabla_b\phi, \nabla_a\phi, \phi)$. En la literatura es comúnmente considerar una lagrangiana dependiente del campo escalar y de su término cinético, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\nabla_a\phi, \phi)$. En esta tesis se trabaja con la última lagrangiana mencionada.

La acción para teorías de gravedad ST en el marco de Jordan[2] es [25]

$$S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{f(\phi)}{2}R - \frac{\omega(\phi)}{2}g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)} \tag{2.81}$$

donde $S^{(m)}$ está dada por (2.2).
De la acción de ST se puede llegar a la acción de BD (2.40) haciendo

$$f(\phi) = \frac{\phi}{8\pi}, \qquad \omega(\phi) = \frac{\omega_0}{8\pi\phi} \tag{2.82}$$

donde ω_0 es constante y el potencial está reescalado por un factor de 16π.
Antes de realizar la variación de la acción ST respecto a la métrica, se reescribe el escalar de Ricci R en términos de, R_1 que contiene las segundas derivadas de la métrica y en R_2 los términos restantes [33]

$$R = R_1 + R_2, \tag{2.83}$$

donde

$$R_1 = g^{ac}\left(\partial_b\Gamma^b{}_{ac} - \partial_c\Gamma_a\right) \tag{2.84}$$

y

$$R_2 = \Gamma_b C^b + \frac{1}{2}\Gamma^b{}_{de}\partial_b g^{de}. \tag{2.85}$$

Se han definido las cantidades

$$\Gamma_a \equiv \Gamma^e{}_{ea} = \frac{\partial_a\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}g^{ed}\partial_a g_{ed} \tag{2.86}$$

y

$$C^c \equiv g^{ab}\Gamma^c{}_{ab} = -\partial_d g^{cd} - g^{cb}\Gamma_b. \tag{2.87}$$

En el apéndice D se muestra el procedimiento para escribir el escalar de Ricci R en términos R_1 y R_2.
No olvidar que el objetivo del presente cálculo es reescribir la acción (2.81), para calcular su variación. Para esto, se define la siguiente cantidad

$$G^c = C^c - g^{ca}\Gamma_a. \tag{2.88}$$

Realizando la derivada parcial de $\sqrt{-g}G^c$ se obtiene

$$\begin{aligned}\partial_c(\sqrt{-g}G^c) &= \partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}\Gamma^c{}_{ab}) - \partial_c(\sqrt{-g}g^{ca}\Gamma_a)\\ &= \sqrt{-g}g^{ac}(\partial_b\Gamma^b{}_{ac} - \partial_c\Gamma_a) + \Gamma^c{}_{ab}\partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}) - \Gamma_a\partial_b(\sqrt{-g}g^{ab}),\end{aligned}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos.
Ya que R_1 es el término entre paréntesis de la ecuación anterior, se tiene que

$$\sqrt{-g}R_1 = \partial_c(\sqrt{-g}G^c) - \Gamma^c{}_{ab}\partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}) + \Gamma_a\partial_b(\sqrt{-g}g^{ab}) \tag{2.89}$$

[2]En el marco de Jordan, la función $f(\phi)$ está acoplada no minimalmente al escalar de Ricci R, para mayor detalle sobre este marco ver [24]

La derivada parcial de $\sqrt{-g}g^{ab}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}) =& g^{ab}\partial_c\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\partial_c g^{ab} \\ =& \sqrt{-g}(\Gamma_c g^{ab} + \partial_c g^{ab}),\end{aligned} \tag{2.90}$$

donde se ha utilizado la ecuación (2.86).
Multiplicando la ecuación anterior por ${\Gamma^c}_{ab}$, se tiene

$${\Gamma^c}_{ab}\partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}) = \sqrt{-g}(\Gamma_c C^c + {\Gamma^c}_{ab}\partial_c g^{ab}). \tag{2.91}$$

un caso particular de (2.90) es

$$\partial_b(\sqrt{-g}g^{ab}) = \sqrt{-g}(\Gamma_b g^{ab} + \partial_b g^{ab}) = -\sqrt{-g}C^a. \tag{2.92}$$

Reemplazando las dos ecuaciones anteriores en (2.89) se llega a

$$\sqrt{-g}R_1 = \partial_c(\sqrt{-g}G^c) - \sqrt{-g}(2\Gamma_c C^c + {\Gamma^c}_{ab}\partial_c g^{ab})$$

donde el último término es $2R_2$, con lo cual

$$\sqrt{-g}R_1 = \partial_c(\sqrt{-g}G^c) - 2R_2 \tag{2.93}$$

usando la ecuación anterior en (2.83), se tiene

$$\sqrt{-g}R = \partial_c(\sqrt{-g}G^c) - \sqrt{-g}R_2. \tag{2.94}$$

Ahora,

$$\partial_c(\sqrt{-g}G^c f(\phi)) = \sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi) + f(\phi)\partial_c(\sqrt{-g}G^c),$$

multiplicando la ecuación (2.94) por $f(\phi)$ y teniendo en cuenta la ecuación anterior se tiene

$$\sqrt{-g}f(\phi)R = -\sqrt{-g}(G^c\partial_c f(\phi) + R_2 f(\phi)) + \partial_c(\sqrt{-g}G^c f(\phi)). \tag{2.95}$$

Considerando la siguiente identidad [22]

$$\nabla_e A^e = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_e(\sqrt{-g}A^e), \tag{2.96}$$

donde A^e es cualquier vector, la ecuación (2.95) queda

$$\sqrt{-g}f(\phi)R = -\sqrt{-g}(G^c\partial_c f(\phi) + R_2 f(\phi)) + \sqrt{-g}\nabla_c(G^c f(\phi)). \tag{2.97}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}f(\phi)R =& -\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(G^c\partial_c f(\phi) + R_2 f(\phi)) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_c(G^c f(\phi)).\end{aligned} \tag{2.98}$$

Aplicando el teorema de Gauss-Stokes al término de divergencia, la integral se anula por la condicion $\delta g_{ab} = 0$ en la frontera $\partial\mathcal{M}$(seguir el mismo desarrollo que se hizo para BD de la sección anterior en la frontera), quedando así [33]

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}f(\phi)R = -\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(G^c\partial_c f(\phi) + R_2 f(\phi)). \tag{2.99}$$

Dada esta integral se procede a calcular la variación de la acción respecto a la métrica.

2.3.1 Variación de la acción respecto a la métrica

Se realiza la variación de los términos de la ecuación (2.99) respecto a la métrica

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}f(\phi)R)}{\delta g_{de}} = -\frac{\delta(\sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi))}{\delta g_{de}} - f(\phi)\frac{\delta(\sqrt{-g}R_2)}{\delta g_{de}}. \tag{2.100}$$

Ahora [33]

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R_2)}{\delta g_{de}} = \sqrt{-g}G^{de}, \tag{2.101}$$

donde G^{de} es el tensor de Einstein.
El primer término de la derecha de (2.100) se convierte en

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi))}{\delta g_{de}} = \partial_c f(\phi)\frac{\partial}{\partial g_{de}}(\sqrt{-g}G^c) - \partial_a\left[\partial_c f(\phi)\frac{\partial(\sqrt{-g}G^c)}{\partial\partial_a g_{de}}\right]. \tag{2.102}$$

En un marco local de Lorentz[3]

$$\Gamma^a{}_{bc} = 0. \tag{2.103}$$

Tomando la derivada covariante de g_{ab}, se tiene

$$\nabla_a g_{de} = \partial_a g_{de} - \cancelto{0}{\Gamma^c_{ad}} g_{ce} - \cancelto{0}{\Gamma^c_{ae}} g_{dc}, \tag{2.104}$$

de la compatibilidad métrica $\nabla_a g_{de} = 0$, por lo tanto

$$\partial_a g_{de} = 0. \tag{2.105}$$

De la ecuación (2.86) se ve que $\partial_a\sqrt{-g} = 0$. Por tanto

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}G^c)}{\partial g_{de}} = \frac{\partial}{\partial g_{de}}(\sqrt{-g}(-\partial_a g^{ca} - g^{cb}g^{af}\partial_b g_{af})) = 0 \tag{2.106}$$

y

$$-\partial_a\left[\partial_c f(\phi)\frac{\partial(\sqrt{-g}G^c)}{\partial\partial_a g_{de}}\right] = -\sqrt{-g}\partial_a\left[\partial_c f(\phi)\frac{\partial G^c}{\partial\partial_a g_{de}}\right]. \tag{2.107}$$

Usando (2.87) se halla

$$\frac{\partial C^c}{\partial\partial_a g_{de}} = -\frac{\partial(\partial_b g^{cb})}{\partial\partial_a g_{de}} - \frac{\partial(g^{cb}\Gamma_b)}{\partial\partial_a g_{de}},$$

[3] En un sistema de coordenadas sometido a un campo gravitacional, es posible realizar una transformación de coordenadas a un marco, en el cual, localmente sea el mismo que un marco inercial. Tal marco es llamado **Marco local de Lorentz**. Esto es debido al principio de equivalencia (e.g ver [34])

teniendo en cuenta (2.4), (2.86) y (2.105)

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^c}{\partial\partial_a g_{de}} &= g^{cf}g^{bh}\frac{\partial\partial_b g_{fh}}{\partial\partial_a g_{de}} - \frac{1}{2}g^{cb}g^{fh}\frac{\partial\partial_b g_{fh}}{\partial\partial_a g_{de}} \\ &= g^{cf}g^{bh}\delta^a_b\delta^d_f\delta^e_h - \frac{1}{2}g^{cb}g^{fh}\delta^a_b\delta^d_f\delta^e_h \\ &= g^{cd}g^{ae} - \frac{1}{2}g^{ca}g^{de}, \qquad (2.108)\end{aligned}$$

por lo tanto, para G^c se tiene

$$\frac{\partial G^c}{\partial\partial_a g_{de}} = \frac{\partial C^c}{\partial\partial_a g_{de}} - \frac{\partial(g^{cb}\Gamma_b)}{\partial\partial_a g_{de}}.$$

utilizando los resultados de la ecuación (2.108) finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^c}{\partial\partial_a g_{de}} &= g^{cd}g^{ae} - \frac{1}{2}g^{ca}g^{de} - \frac{1}{2}g^{ca}g^{de} \\ &= g^{cd}g^{ae} - g^{ca}g^{de}. \qquad (2.109)\end{aligned}$$

Reemplazando (2.106) y (2.109) en (2.102), además, recordando que se está trabajando en un marco local de Lorentz se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi))}{\delta g_{de}} &= -\sqrt{-g}\partial_a\left[\partial_c f(\phi)(g^{cd}g^{ae} - g^{ca}g^{de})\right] \\ &= -\sqrt{-g}(g^{cd}g^{ae} - g^{ca}g^{de})\partial_a\partial_c f(\phi)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi))}{\delta g_{de}} = -\sqrt{-g}(\partial^d\partial^e - g^{de}\Box)f(\phi) \qquad (2.110)$$

donde $\Box = g^{ac}\partial_a\partial_c$ es el operador D'Lambertiano en el espacio-tiempo de Minkowski. Extendiendo este resultado a un espacio-tiempo curvo (el resultado se puede extender debido al principio de equivalencia, e.g. ver [34]), (2.110) se convierte en

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}G^c\partial_c f(\phi))}{\delta g_{de}} = -\sqrt{-g}(\nabla^d\nabla^e - g^{de}\Box)f(\phi) \qquad (2.111)$$

donde $\Box = g^{ac}\nabla_a\nabla_c$.
Usando las ecuaciones (2.101) y (2.111) en (2.100) se ve que

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}f(\phi)R)}{\delta g_{de}} = \sqrt{-g}(\nabla^d\nabla^e f(\phi) - g^{de}\Box f(\phi) + G^{de}f(\phi)). \qquad (2.112)$$

Variando la acción de Escalar-Tensor (2.81) respecto a la métrica se tiene

$$\begin{aligned}\delta S^{(ST)} = &\int_{\mathcal{M}} d^4x\left[\delta\left(\frac{\sqrt{-g}f(\phi)R}{2}\right) - \frac{\omega(\phi)}{2}\delta(\sqrt{-g}g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi)\right] \qquad (2.113) \\ &- \int_{\mathcal{M}} d^4x\delta(\sqrt{-g}V(\phi)) + \delta S^{(m)}. \qquad (2.114)\end{aligned}$$

Utilizando (2.5) en el término de la segunda integral de la ecuación anterior

$$\delta(\sqrt{-g}V(\phi)) = V(\phi)\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}V(\phi)\delta g^{ab}. \qquad (2.115)$$

Se calcula la variación de

$$\delta(\sqrt{-g}g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi) = \delta(\sqrt{-g})g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi + \sqrt{-g}\delta g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi,$$

aplicando (2.5) en la ecuación anterior

$$\delta(\sqrt{-g}g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi) = \left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right)\sqrt{-g}\delta g^{ab}. \tag{2.116}$$

Para obtener la variación de la acción de Escalar-Tensor, se reemplaza (2.115), (2.116) y (2.112) en (2.113)

$$\begin{aligned}\delta S^{(ST)} = &\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(\nabla^a\nabla^b f(\phi) - g^{ab}\Box f(\phi) - f(\phi)G^{ab})\delta g_{ab}\\ &- \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\omega(\phi)(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi)\delta g^{ab}\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}g_{ab}V(\phi)\delta g^{ab} + \delta S^{(m)},\end{aligned} \tag{2.117}$$

ahora de la relación (2.4) y de la variación de la acción (2.35), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\delta S^{(ST)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\Big[&g_{ab}\Box f(\phi) + f(\phi)G_{ab} - \nabla_a\nabla_b f(\phi)\\ &- \omega(\phi)(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi) + g_{ab}V(\phi)\delta g^{ab} - T^{(m)}_{ab}\Big]\delta g^{ab}.\end{aligned} \tag{2.118}$$

Imponiendo que ésta variación sea estacionaria, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{(ST)}}{\delta g^{ab}} = 0, \tag{2.119}$$

entonces

$$\boxed{\begin{aligned}f(\phi)G_{ab} = T^{(m)}_{ab} &+ \omega(\phi)(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi)\\ &+ (\nabla_a\nabla_b f(\phi) - g_{ab}\Box f(\phi)) - g_{ab}V(\phi).\end{aligned}} \tag{2.120}$$

Las cuales son las ecuaciones de campo para las teorías de gravedad ST.

2.3.2 Variación de la acción respecto al campo escalar

Realizando la variación de la acción de ST (2.81) respecto a $\delta\phi$

$$\delta S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R\delta f(\phi) - \frac{1}{2}\delta(\omega(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\phi) - \delta V(\phi)\right], \tag{2.121}$$

se ve que $\delta f(\phi) = \frac{df(\phi)}{d\phi}\delta\phi = f_\phi\delta\phi$.

El segundo término queda

$$\begin{aligned}\delta(\omega(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\phi) &= \nabla^c\phi\nabla_c\phi\delta\omega(\phi) + \omega(\phi)\delta(\nabla^c\phi\nabla^c\phi)\\ &= \nabla^c\phi\nabla_c\phi\delta\omega(\phi) + 2\omega(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\delta\phi\\ &= \nabla^c\phi\nabla_c\phi\omega_\phi\delta\phi + 2\omega(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\delta\phi,\end{aligned} \tag{2.122}$$

reemplazando el valor obtenido anteriormente en la variación de la acción (2.121), se tiene

$$\delta S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}Rf_\phi - \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi - V_\phi\right]\delta\phi - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\omega(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\delta\phi, \tag{2.123}$$

teniendo en cuenta (2.70) en la ecuación anterior, se llega a

$$\delta S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}Rf_\phi - \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \omega(\phi)\Box\phi - V_\phi\right]\delta\phi - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\omega(\phi)\nabla_c(\delta\phi\nabla^c\phi). \tag{2.124}$$

Sea

$$\begin{aligned}\nabla_c(\omega(\phi)\nabla^c\phi\delta\phi) &= \nabla_c(\omega(\phi))\nabla^c\phi\delta\phi + \omega(\phi)\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi)\\ &= \omega_\phi\nabla_c\phi\nabla^c\phi\delta\phi + \omega(\phi)\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega(\phi)\nabla_c(\nabla^c\phi\delta\phi) = \nabla_c(\omega(\phi)\nabla^c\phi\delta\phi) - \omega_\phi\nabla_c\phi\nabla^c\phi\delta\phi.$$

Reemplazando la ecuación anterior en la variación de la acción (2.124), se tiene

$$\delta S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}Rf_\phi + \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \omega(\phi)\Box\phi - V_\phi\right]\delta\phi - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_c(\omega(\phi)\nabla^c\phi\delta\phi). \tag{2.125}$$

aplicando el teorema de Gauss-Stokes a la última integral y haciendo lo mismo que para BD (ver 2.75) se tiene

$$\delta S^{(ST)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}Rf_\phi + \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi + \omega(\phi)\Box\phi - V_\phi\right]\delta\phi. \tag{2.126}$$

Imponiendo que ésta variación sea estacionaria

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{(ST)}}{\delta\phi} = 0, \tag{2.127}$$

se obtiene la ecuación de campo

$$\boxed{\omega(\phi)\Box\phi + \frac{1}{2}Rf_\phi + \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi - V_\phi = 0}. \tag{2.128}$$

2.4 Teorías $f(R)$

Después de que Einstein propusiera la RG. Kretschman [35], propuso una acción construida con el escalar $R_{abcd}R^{abcd}$ en vez del escalar de Ricci, el cual fue denominado tiempo después como el *escalar de Kretschman*. Más adelante, se consideró una acción donde se reemplazaba el escalar de curvatura R por el escalar de Gauss-Bonnet $\mathcal{G}$ [36], la cual está dada por

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}.$$

Sin embargo, existe una teoría mas general denominada Teoría de Lovelock [37] en el cual se da una generalización del escalar de Gauss-Bonnet. Como una extensión natural de RG y de las teorías de orden superior surgen las teorías $f(R)$ las cuales consideran una función arbitraria del escalar de Ricci.
La acción para teorías $f(R)$ es [16]

$$S^{f(R)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}f(R) + S^{(m)}, \tag{2.129}$$

donde $f(R)$ es una función analítica no lineal del escalar de Ricci y $S^{(m)}$ esta dada por (2.2). La variación de la acción respecto a δg^{ab} da

$$\delta S^{f(R)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\delta(\sqrt{-g}f(R)) + \delta S^{(m)}, \tag{2.130}$$

como

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}f(R)) &= \sqrt{-g}f_R\delta R + f(R)\delta\sqrt{-g}\\ &= \sqrt{-g}(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R))\delta g^{ab} + \sqrt{-g}f_R(\nabla_c(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ac})),\end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones (2.5) y (2.7), y el hecho de que $\delta f(R) = f_R\delta R$. Ahora,

$$\begin{aligned}\nabla_c(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab}) - \nabla_b(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ac}) &= \nabla_d(g^{ab}\delta\Gamma^c{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^c{}_{ac})\\ &= g_{ef}\Box\delta g^{ef} - \nabla_e\nabla_f\delta g^{ef},\end{aligned}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos y se ha usado la ecuación (2.45). Por lo tanto, la variación de la acción queda escrita como

$$\begin{aligned}\delta S^{f(R)} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R)\right)\delta g^{ab}\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x f_R\left(g_{ab}\Box\delta g^{ab} - \nabla_a\nabla_b\delta g^{ab}\right) + \delta S^{(m)}.\end{aligned} \tag{2.131}$$

Para analizar la última integral se definen las siguientes cantidades (no confundir con las cantidades definidas para BD)

$$M_c = f_R g_{ab}\nabla_c\delta g^{ab} - \delta g^{ab}g_{ab}\nabla_c f_R \tag{2.132}$$

y

$$N^c = f_R\nabla_e\delta g^{ce} - \delta g^{ce}\nabla_e f_R. \tag{2.133}$$

Haciendo un procedimiento similar al hecho en BD (apéndice B), se llega a

$$f_R(g_{ab}\Box\delta g^{ab} - \nabla_a\nabla_b\delta g^{ab}) = \delta g^{ab}(g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R) + (\nabla^c M_c - \nabla_c N^c). \tag{2.134}$$

La ecuación (2.131) queda

$$\delta S^{f(R)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) + g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R\right)\delta g^{ab} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x(\nabla^c M_c - \nabla_c N^c) + \delta S^{(m)}. \tag{2.135}$$

Aplicando el teorema de Gauss-Stokes (2.12) en el término de divergencia se tiene

$$\delta S^{f(R)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) + g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R\right)\delta g^{ab} + \frac{1}{2}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n^c M_c - \frac{1}{2}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n_c N^c + \delta S^{(m)}. \tag{2.136}$$

Los términos $n^c M_c$ y $n_c N^c$ sobre la frontera dan [38]

$$n^c M_c\Big|_{\partial\mathcal{M}} = -f_R n^c h^{ab}\partial_c\delta g_{ab} \tag{2.137}$$

y

$$n_c N^c\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \tag{2.138}$$

Con estos resultados la variación de la acción queda

$$\delta S^{f(R)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) + g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R\right)\delta g^{ab} - \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon f_R n^c h^{ab}\partial_c\delta g_{ab} + \delta S^{(m)}. \tag{2.139}$$

Se introduce el término de frontera tipo GYH para $f(R)$ (como se expuso para RG, BD y ST, este término se introduce para no hacer más consideraciones sobre δg_{ab} en la frontera), el cual está dado por [29]

$$S_{GYH}^{f(R)} = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon f_R K, \tag{2.140}$$

La variación resulta

$$\begin{aligned}\delta S_{GYH}^{f(R)} &= \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon(\delta f_R K + f_R\delta K)\\ &= \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon(f_{RR}K\delta R + f_R\delta K),\end{aligned} \tag{2.141}$$

donde $f_{RR} = \frac{d^2 f}{dR^2}$.
Usando la variación de K, ecuación (2.30), se tiene

$$\delta S_{GYH}^{f(R)} = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon f_{RR}K\delta R + \frac{1}{2}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^3y\sqrt{|h|}\epsilon n^d f_R h^{ab}\partial_d\delta g_{ba}. \tag{2.142}$$

El segundo término de la ecuación anterior cancela con el término de frontera de (2.139) y adicionalmente se necesita imponer $\delta R = 0$ en la frontera [38].
Teniendo en cuenta la variación de la acción de materia (2.35), la ecuación (2.139)

finalmente queda

$$\delta S^{f(R)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) + g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R - T^{(m)}_{ab}\right)\delta g^{ab}. \tag{2.143}$$

Imponiendo que esta variación sea estacionaria, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{f(R)}}{\delta g^{ab}} = 0, \tag{2.144}$$

entonces

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) + g_{ab}\Box f_R - \nabla_a\nabla_b f_R = T^{(m)}_{ab}, \tag{2.145}$$

son las ecuaciones de campo para $f(R)$.
Estas ecuaciones son de cuarto orden en la métrica (por la contribución de segundas derivadas en R de los operadores $\Box$ y $\nabla_a\nabla_b$).
Las ecuaciones de campo que resultan de las teorías de orden superior[4], tienden a tener problemas de *fantasmas* (estados de norma negativa cuya existencia viola la unicidad al permitir que las probabilidades sean negativas [39]). Sin embargo, para teorías $f(R)$, cuya lagrangiana consiste de funciones solamente del escalar de Ricci no sufren de los problemas anteriores [30] (teorema de inestabilidad Ostrogradsky, para mayor detalle ver [40] y las referencias allí citadas.) .
La traza de estas ecuaciones de campo 2.145 es

$$f_R R - 2f(R) + 3\Box f_R = T^{(m)}, \tag{2.146}$$

en donde se puede ver la relación diferencial entre R y $T^{(m)}$.
Las ecuaciones de campo se pueden reescribir como

$$\boxed{f_R G_{ab} = T^{(m)}_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}(f(R) - Rf_R) + \nabla_a\nabla_b f_R - g_{ab}\Box f_R}. \tag{2.147}$$

Tomando $f(R) = R$, $f_R = 1$, las ecuaciones de campo de $f(R)$ se reducen a las ecuaciones de campo de Relatividad General.

[4]Teorías con acciones mas allá del escalar de Ricci R [30]

Capítulo 3

Universo Homogéneo e Isotrópico

La cosmología moderna se basa en el principio cosmológico, el cual afirma, que al menos a gran escala[1], el universo es homogéneo e isotrópico [41]. Este universo, se describe por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Esta métrica permite encontrar las soluciones dinámicas del universo, conocidas como ecuaciones de Friedmann.
En el presente capítulo se encuentran las ecuaciones de Friedmann para RG, BD, ST y $f(R)$, en función del tiempo cósmico t y del tiempo conformal η. Ocasionalmente, es más conveniente trabajar con η, sobretodo, cuando se estudian perturbaciones, el cual será el tema principal en el próximo capítulo.

3.1 Cosmología estándar

En el modelo estándar de la cosmología, la expansión del universo se describe mediante la evolución del factor de escala $a(t)$ que aparece en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), escrita en coordenadas esféricas como [42]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{3.1}$$

donde K determina la geometría de las hipersuperficies espaciales. Si $K = 0$ la geometría es plana, si $K = 1$ la geometría es esférica y si $K = -1$ es hiperbólica y t es el tiempo cósmico.
El principio cosmológico permite escribir el tensor momentum-energía en la forma de fluido perfecto[42]

$$T_{ab} = pg_{ab} + (p+\rho)u_a u_b, \tag{3.2}$$

siendo p la presión del fluido, ρ la densidad de energía y u^a es la cuadrivelocidad de los observadores fundamentales[2].
A partir de la métrica se obtienen los símbolos de Christoffel [43]

$$\Gamma^0{}_{00} = 0, \qquad \Gamma^0{}_{0\mu} = 0, \qquad \Gamma^0{}_{\mu\nu} = a(t)\dot{a}(t)\widehat{g}_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

$$\Gamma^\mu{}_{0\nu} = H(t)\delta_{\mu\nu}, \qquad \Gamma^\mu{}_{00} = 0, \qquad \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} = \widehat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\gamma}. \tag{3.4}$$

donde un punto denota diferenciación respecto a la coordenada temporal t y $\widehat{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de la hipersuperficie maximalmente simétrica (es decir, $g_{\mu\nu} = a^2(t)\widehat{g}_{\mu\nu}$).
Las componentes del tensor de Ricci quedan dadas por [43]

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{0\mu} = 0, \quad R_{\mu\nu} = (a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2K)\widehat{g}_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

[1]Escalas mayores que 100 Mpc.
[2]Observadores comóviles en la métrica FLRW

y el escalar de Ricci

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{K}{a^2(t)}\right). \tag{3.6}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de campo de Einstein (2.37) se obtienen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del universo, conocidas como las ecuaciones de Friedmann (ver e.g., la referencia [42])

$$H^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \qquad \text{componente tiempo-tiempo} \tag{3.7}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \qquad \text{componente espacial-espacial} \tag{3.8}$$

en las ecuaciones de Friedmann no aparece la componente tiempo-espacio, ya que estas componentes son cero, tanto en el tensor de Einstein como en el tensor momentum-energía. $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble[3], el cual dice como se .
La conservación de la energía es

$$\nabla^b T_{ab} = 0. \tag{3.9}$$

Si se reemplaza el tensor momentum-energía del fluido perfecto (3.2) se obtiene la siguiente ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \tag{3.10}$$

En el elemento de línea FLRW (3.1) la parte espacial del sistema de coordenadas se está expandiendo con la expansión del universo. Es práctico, realizar un cambio en la coordenada temporal, tal que ésta, también se expanda con el universo.
Utilizando como coordenada temporal el tiempo conformal η, definido por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \tag{3.11}$$

el elemento de linea FLRW para $K = 0$[4] queda

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu). \tag{3.12}$$

Usando el tiempo conformal, las ecuaciones de Friedmann quedan

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\rho}{3}a^2 \qquad \text{componente tiempo-tiempo} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)a^2 \qquad \text{componente espacial-espacial} \tag{3.14}$$

donde $' = \frac{d}{d\eta}$. A continuación se muestran las relaciones entre el parámetro de Hubble escrito en función del tiempo conformal con el mismo pero escrito en función del tiempo cósmico t.

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = aH \tag{3.15}$$

y

$$\mathcal{H}' = \left(\frac{a'}{a}\right)' = a^2(\dot{H} + H^2). \tag{3.16}$$

[3]El parámetro de Hubble proporciona la tasa de expansión del universo.
[4]Observaciones del CMB y WMAP favorecen un universo con $K = 0$ [6, 44].

Para resolver la ecuación de conservación (3.10), es necesario conocer una relación entre la presión p y la densidad de energía ρ. Para ello, se considera una ecuación de estado de la forma [41]

$$p = w\rho, \tag{3.17}$$

con w un parámetro, que a lo más puede depender del tiempo[5] $w = w(t)$. Las ecuaciones de Friedmann junto con la ecuación de estado (3.17) determinan el modelo cosmológico. Los modelos más trabajados son: el de polvo ($w = 0$) y radiación ($w = \frac{1}{3}$) [41], los cuales dan cuenta de la evolución del universo. Sin embargo, hoy en día se sabe que el universo se expande de forma acelerada. De esta manera surgen los modelos de constante cosmológica, que tratan de explicar esa expansión introduciendo formas exóticas de energía [45]. Para que el universo tenga una expansión acelerada se necesita que $\ddot{a} > 0$. Usando la ecuación de Friedmann (3.8) y la ecuación de estado (3.17), se llega a que $w < \frac{1}{3}$. Los modelos con ecuaciones de estado de esta forma se denominan de Quintaesencia [46]. El caso con $w = -1$ se obtiene suponiendo en la ecuación (3.17) que la densidad es constante, lo cual lleva a una ecuación de estado de la forma

$$p = -\rho, \tag{3.18}$$

es decir, una ecuación de estado con presión negativa. A esta forma de energía se le conoce como **energía oscura**.

En las siguientes secciones, se trabajan con las teorías de gravedad modificada: BD, ST y $f(R)$. Las cuales explican la aceleración del universo sin introducir el término de energía oscura.

3.2 Cosmología de Brans-Dicke

El campo escalar de BD sólo depende del tiempo cósmico t[6], por lo tanto bajo la métrica FLRW se cumple

$$\nabla^c\phi\nabla_c\phi = -\,\dot{\phi}^2, \tag{3.19}$$

$$\Box\phi = -(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) = -\,\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(a^3\dot{\phi}), \tag{3.20}$$

además, si el tensor momentum-energía asume la forma del fluido perfecto (3.2), las ecuaciones de Friedmann para BD son [25]

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi}{3\phi}\rho + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - H\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) - \frac{K}{a^2} + \frac{V}{6\phi}} \tag{3.21}$$

y

$$\boxed{2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{8\pi}{\phi}p - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi}\right) + \frac{V(\phi)}{2\phi} + \frac{K}{a^2}}, \tag{3.22}$$

donde la primera ecuación es la componente tiempo-tiempo y la segunda es la componente espacio-espacio. En el apéndice E.1 se muestra cómo se llega a estas ecuaciones.

[5] Debido al principio cosmológico

[6] Debido al principio cosmológico.

Dado un potencial $V(\phi)$, se puede tener un universo en expansión acelerada [47, 48], sin la necesidad de introducir un término extra, como en el caso de RG.
Las ecuaciones de Friedmann se pueden escribir en términos del tiempo conformal (3.11). Utilizando las relaciones (3.15) y (3.16), con $K=0$, se obtiene

$$\boxed{\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3\phi}\rho a^2 + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - \mathcal{H}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) + \frac{V}{6\phi}a^2} \tag{3.23}$$

y

$$\boxed{-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{\phi}pa^2 + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + \frac{1}{\phi}(\phi'' + \mathcal{H}\phi') - \frac{V}{2\phi}a^2}. \tag{3.24}$$

Donde se ha usado la relación

$$\ddot{\phi} = \frac{\phi''}{a^2} - \frac{\mathcal{H}}{a^2}\phi'. \tag{3.25}$$

La ecuación de campo de BD para el campo escalar (2.80) queda

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega+3}[8\pi(\rho - 3p) - \phi\frac{dV}{d\phi} + 2V], \tag{3.26}$$

donde se ha usado la relación (3.20) y el hecho de que la traza del momentum-energía es

$$T^{(m)} = 3p - \rho, \tag{3.27}$$

la última ecuación se puede reescribir en términos del tiempo conformal como

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' = \frac{a^2}{2\omega+3}[8\pi(\rho - 3p) - \phi\frac{dV}{d\phi} + 2V]. \tag{3.28}$$

Las ecuaciones (3.23) y (3.28) son consideradas 2 ecuaciones independientes que regulan la dinámica de la cosmología de BD.

3.3 Cosmología en teorías Escalar-Tensor

Para calcular las ecuaciones de Friedmann en teorías Escalar-Tensor se sigue el mismo procedimiento que se hizo para calcular las ecuaciones de Friedmann para BD, es decir, se parte de las ecuaciones de campo de Escalar-Tensor (2.120), se asume la métrica de un universo homogéneo e isotrópico (3.1) con $K=0$, un tensor de momentum-energía de fluido perfecto (3.2) y se llega a las siguientes ecuaciones (Apéndice E.2)

$$\boxed{3fH^2 = \rho + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 + V - 3H\dot{f}}. \tag{3.29}$$

y

$$\boxed{-2\dot{H}f - 3H^2 f = p + \frac{1}{2}\omega\dot{\phi}^2 + \ddot{f} + 2H\dot{f} - V}, \tag{3.30}$$

las cuales son las componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio de las ecuaciones de Friedmann para ST.
Dado un potencial $V(\phi)$, se puede tener un universo en expansión acelerada [49, 50], sin la necesidad de introducir el término de constante cosmológica.

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en términos del tiempo conformal

$$\boxed{3\mathcal{H}^2 f = \rho a^2 + \frac{\omega}{2}\phi'^2 + Va^2 - 3\mathcal{H}f'}. \tag{3.31}$$

y

$$\boxed{-(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)f = pa^2 + \frac{1}{2}\omega\phi'^2 + \mathcal{H}f' + f'' - Va^2}. \tag{3.32}$$

Reemplazando (3.29) en (3.30) se elimina el término del potencial, quedando

$$-2f\dot{H} = \rho + p + \omega\dot{\phi}^2 + \ddot{f} - H\dot{f}. \tag{3.33}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.20) en la ecuación de campo (2.128) se obtiene

$$\omega(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) = 3f_\phi(\dot{H} + 2H^2) - \frac{1}{2}\omega_\phi\dot{\phi}^2 - V_\phi, \tag{3.34}$$

la cual se puede reescribir en términos del tiempo conformal

$$\omega(\phi'' + 2\mathcal{H}\phi') = 3f_\phi(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - \frac{1}{2}\omega_\phi\phi'^2 - V_\phi a^2. \tag{3.35}$$

Las ecuaciones de Friedmann y del campo escalar para ST se reducen a las ecuaciones de BD tomando las relaciones (2.82).

3.4 Cosmología en f(R)

Para calcular las ecuaciones de Friedmann con $K = 0$, se parte de las ecuaciones de campo para teorías $f(R)$ (2.147), se asume la métrica de un universo homogéneo e isotrópico (3.1), un tensor de momentum-energía de fluido perfecto (3.2) y se llega a las siguientes ecuaciones [16] (Apéndice E.3)

$$\boxed{3H^2 f_R = \rho + \frac{1}{2}(Rf_R - f(R)) - 3Hf_{RR}\dot{R}} \tag{3.36}$$

y

$$\boxed{-(2\dot{H} + 3H^2)f_R = p + 2H\dot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f(R) - Rf_R) + \ddot{R}f_{RR} + \dot{R}^2 f_R^{(3)}}, \tag{3.37}$$

las cuales son las componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio de las ecuaciones de Friedmann con $K = 0$ para $f(R)$. Aquí, $f_{RR} = \dfrac{d^2 f(R)}{dR^2}$ y $f_R^{(3)} = \dfrac{d^3 f(R)}{dR^3}$, el punto denota diferenciación respecto a t.
A partir de la traza de la ecuación de campo (2.146), se puede encontrar una relación para $f(R)$ y sus derivadas con la presión y la densidad de la energía [51]

$$f_R R - 2f(R) + 3\Box f_R = (3p - \rho). \tag{3.38}$$

Las ecuaciones de Friedmann se pueden expresar en términos del tiempo conformal

$$\boxed{3\mathcal{H}^2 f_R = \rho a^2 + \frac{a^2}{2}(Rf_R - f(R)) - 3\mathcal{H}f_{RR}R'} \tag{3.39}$$

y

$$\boxed{-(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)f_R = pa^2 + \mathcal{H}R'f_{RR} + \frac{a^2}{2}(f(R) - Rf_R) + R''f_{RR} + R'^2 f_R^{(3)}}. \tag{3.40}$$

Dependiendo del modelo de $f(R)$, se puede tener un universo expandiéndose aceleradamente, sin la necesidad de un término extra de energía [52, 53].

Capítulo 4

Perturbaciones Cosmológicas

La premisa central en la cosmología moderna es que al menos a gran escala, el Universo es homogéneo e isotrópico [41]. Esto ha sido inferido de las observaciones, de la cuasi igualdad en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB) (presenta fluctuaciones del orden de 10^{-5}K) (ver figura 4.1). No obstante, a pesar de esta homogeneidad a gran escala, son bien conocidas las inhomogeneidades en regiones a escalas menores (~ 40 Mpc.), donde el material se aglomera en galaxias y en cúmulos de galaxias.

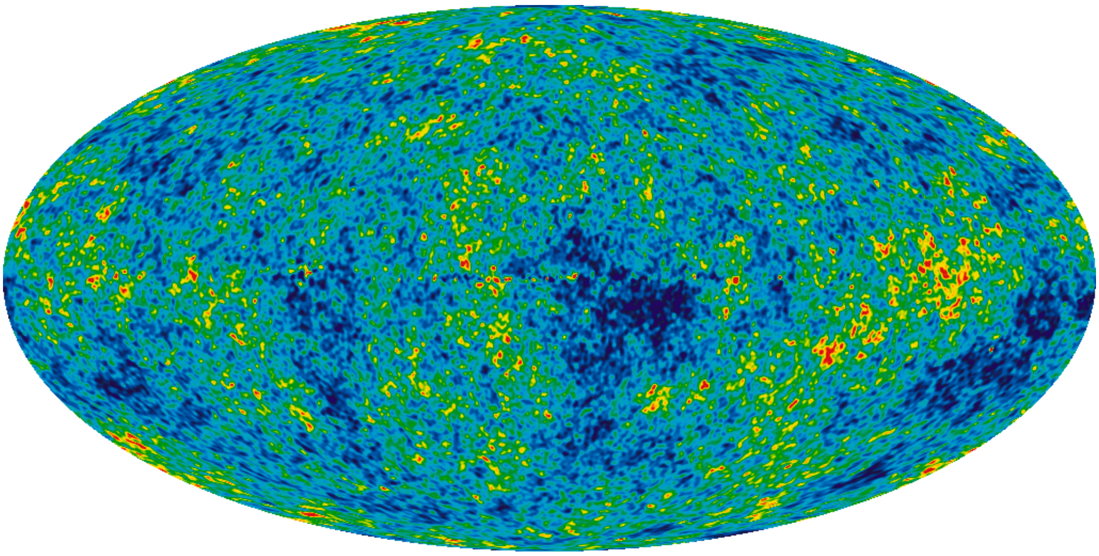

FIGURE 4.1: La radiación cósmica de fondo presenta en promedio una temperatura de 2.7K con variaciones del orden de 10^{-5}K. Figura tomada de NASA/WMAP

En esta tesis se toma la métrica FLRW con $K = 0$ como fondo y sobre ésta se imponen perturbaciones a primer orden con el fin de describir las inhomogeneidades presentes en las observaciones.

La teoría de perturbaciones cosmológicas a primer orden ha sido utilizada para explicar las anisotropías de CMB y la formación de estructuras [54, 45]. Esta teoría ha sido corroborada con las observaciones realizadas [6, 7]. Sin embargo, para cierto problemas cosmológicos es necesario trabajar con perturbaciones de segundo orden. Por ejemplo, si se quiere describir la no gaussianidad de la perturbación primordial, o describir los efectos de polarización en CMB [55, 56].

En el presente capitulo se estudian las perturbaciones cosmológicas escalares en el gauge de Newton conforme[1] para RG, y las TGM, BD, ST y $f(R)$. Además, se hallan las perturbaciones para las ecuaciones de continuidad de momentum-energía [57].

4.1 Perturbaciones en Relatividad General

En teoría de perturbaciones en Relatividad General se considera un espacio-tiempo perturbado que es cercano al espacio-tiempo background que ya se conoce[2] [54, 58]. En particular, en cosmología, el background es homogéneo e isotrópico descrito por la métrica FLRW (3.1), así que, cualquier tensor puede ser escrito en la forma

$$\mathbf{T}(\eta,\mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{T}}(\eta) + \delta\mathbf{T}(\eta,\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

donde

$$\delta\mathbf{T}(\eta,\mathbf{x}) \equiv \sum \frac{\epsilon^n}{n!}\delta_n\mathbf{T}(\eta,\mathbf{x}), \tag{4.2}$$

donde η es el tiempo conformal. De aquí en adelante se consideran perturbaciones a primer orden, las variables con barra se refieren a cantidades background y las que no la tienen son cantidades perturbadas. El espacio-tiempo es dividido en una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales, llamadas *slicings*, de tiempo conformal constante. Las variables perturbadas se descomponen en sus partes escalares, vectoriales y tensoriales de acuerdo a sus propiedades de transformación bajo rotaciones espaciales, esta es, la descomposición SVT ó descomposición de Helmholtz [57, 59, 45].

El teorema SVT permite descomponer las perturbaciones vectoriales en una parte escalar y una parte vectorial

$$A_\mu = A_\mu^S + A_\mu^V, \tag{4.3}$$

donde

$$A_\mu^S = -\nabla_\mu A \quad \text{y} \quad \nabla^\mu A_\mu^V = 0, \tag{4.4}$$

el signo negativo viene del hecho en asumir el campo escalar A como un potencial.
Un 3-tensor simétrico sin traza $E_{\mu\nu}$ se descompone en sus partes escalar, vectorial y tensorial

$$E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}^S + E_{\mu\nu}^V + E_{\mu\nu}^T, \tag{4.5}$$

donde

$$E_{\mu\nu}^S = \left(\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)E, \tag{4.6}$$

$$E_{\mu\nu}^V = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu E_\nu + \nabla_\nu E_\mu), \quad \nabla_\mu E_\mu = 0, \tag{4.7}$$

$$\nabla_\mu E_{\mu\nu}^T = 0. \tag{4.8}$$

Lo importante de esta división es que las partes escalares, vectoriales y tensoriales no están acopladas entre sí, es decir, evolucionan independientemente, debido a que se están considerando perturbaciones a primer orden [54].

[1] Elección apropiada para describir las perturbaciones escalares.
[2] Espacio-tiempo descrito por la métrica FLRW

4.1.1 Transformaciones Gauge

En teoría de perturbaciones en relatividad general, una transformación gauge es una transformación de coordenadas sobre el espacio-tiempo perturbado. Como no hay una elección de gauge preferencial, se hallará una relación entre las perturbaciones en diferentes gauges[3]. Sean x^a y $\hat{x}^a$ dos sistemas de coordenadas sobre una variedad física $\mathcal{M}$ así que estos dos sistemas de coordenadas corresponden a dos diferentes gauges [57].
La transformación de coordenadas está dada por

$$\hat{x}^a = x^a + \xi^a, \tag{4.9}$$

donde ξ^a y las derivadas son de primer orden pequeñas [58].
Las coordenadas $\hat{x}^a$ se asocian a un punto $\bar{P}$ en el background con $\hat{P}$, mientras que las coordenadas x^a al mismo punto del background $\bar{P}$ se asocian con el punto P (ver figura 4.2). La asociación está dada por

$$x^a(P) = \hat{x}^a(\hat{P}) = \bar{x}^a(\bar{P}). \tag{4.10}$$

La transformación de coordenadas relaciona las coordenadas sobre el mismo punto

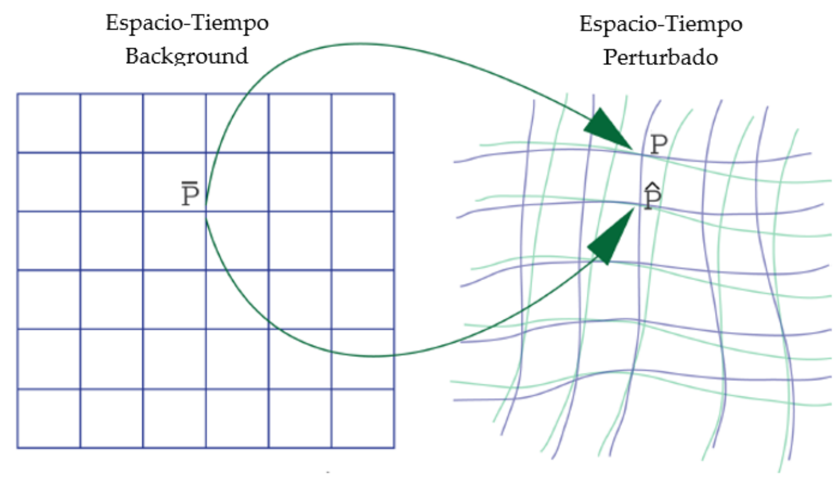

FIGURE 4.2: Mapeo correspondiente entre 2 gauges: Un punto sobre la variedad background no tiene una única correspondencia sobre un punto del espacio-tiempo perturbado. Figura adaptada de la ref. [57].

en el espacio-tiempo perturbado, i.e.,

$$\begin{aligned}\hat{x}^a(P) &= x^a(P) + \xi^a,\\ \hat{x}^a(\hat{P}) &= x^a(\hat{P}) + \xi^a.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Como ξ^a es a primer orden pequeña, se puede asociar con el punto fijo del background

$$\xi^a = \xi^a(\bar{x}(\bar{P})). \tag{4.12}$$

[3]Se está buscando describir cantidades invariantes gauges, i.e, que no dependan del sistema de coordenadas elegido.

Usando las ultimas dos ecuaciones se pueden relacionar dos puntos distintos en las mismas coordenadas

$$x^a(\hat{P}) = x^a(P) - \xi^a \tag{4.13}$$

$$\hat{x}^a(\hat{P}) = \hat{x}^a(P) - \xi^a. \tag{4.14}$$

Se definen las perturbaciones en diferentes gauges como funciones de la variedad background en un sistema de coordenadas background $\bar{x}^a$ a un punto dado $\bar{P}$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}T &\equiv T(\hat{x}^a(\hat{P})) - \bar{T}(\bar{x}^a(\bar{P}))\\ \delta T &\equiv T(x^a(P)) - \bar{T}(\bar{x}^a(\bar{P})).\end{aligned} \tag{4.15}$$

La correspondencia entre las perturbaciones en diferentes gauges es

$$\hat{\delta}T = \delta T + T(\hat{x}^a(\hat{P})) - T(x^a(P)), \tag{4.16}$$

donde se ha usado (4.15).
Sea $s = \bar{s} + \delta s$ una perturbación escalar. La cantidad s cambia cuando se mueve de un punto P con coordenadas x^a a un punto $\hat{P}$ con coordenadas $\hat{x}^a$. Expandiendo el nuevo escalar s alrededor del punto antiguo $\hat{P}$ da

$$\begin{aligned}s(\hat{x}^a(\hat{P})) &= s(\hat{x}^a(P)) + (\hat{x}^b(\hat{P}) - \hat{x}^b(P))\frac{\partial}{\partial x^b}s(\hat{x}^a(P))\\ &= s(x^a(P)) - \xi^b\frac{\partial}{\partial x^b}\bar{s}(x^a(P)).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad background sólo depende de η debido a la homogeneidad y del hecho que ξ^a es de primer orden pequeña, se tiene

$$s(\hat{x}^a(\hat{P})) = s(x^a(P)) - \xi^0\bar{s}'. \tag{4.17}$$

Usando (4.16) y la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\delta}s &= \delta s + s(x^a(P)) - s(x^a(P))\\ &= \delta s - \xi^0\bar{s}'.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Cabe anotar que la ecuación anterior muestra que la perturbación escalar no es inmediatamente un invariante gauge, sin embargo, es posible formar combinaciones lineales de diferentes variables de perturbación para que sean invariantes [60].
La matriz Jacobiana y su inversa para la transformación infinitesimal (4.9) son

$$\frac{\partial x^a}{\partial \hat{x}^b} = \delta^a_b - \xi^a{}_{,b} \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} = \delta^a_b + \xi^a{}_{,b}\,. \tag{4.20}$$

Ahora, se expande un 4-tensor tipo $(0,2)$[4] como se hizo para el caso del escalar, obteniendo

$$B_{ab}(\hat{P}) = B_{ab}(P) - \xi^c\bar{B}_{ab,c}(\bar{P}). \tag{4.21}$$

[4]En específico se expande un tensor tipo $(0,2)$, ya que se quiere expandir el tensor métrico.

Realizando un a transformación de coordenadas, las componentes del tensor cambian de acuerdo a

$$B_{ab}(\hat{x}^e(\hat{P})) = \frac{\partial x^c}{\partial \hat{x}^a}\frac{\partial x^d}{\partial \hat{x}^b}B_{cd}(x^e(\hat{P})) = (\delta^c_a - \xi^c{}_{,a})(\delta^d_b - \xi^d{}_{,b})(B_{cd}(x^e) - \xi^f B_{cd,f}(x^e))$$
$$= B_{ab}(x^e(P)) - \xi^c{}_{,a}\bar{B}_{cb} - \xi^d{}_{,b}\bar{B}_{ad} - \xi^f \bar{B}_{ab,f}\,. \tag{4.22}$$

La regla de transformación gauge da

$$\hat{\delta}B_{ab} = \delta B_{ab} - \xi^c{}_{,a}\bar{B}_{cb} - \xi^d{}_{,b}\bar{B}_{ad} - \xi^e \bar{B}_{ab,e}\,, \tag{4.23}$$

donde se ha usado (4.16).
Dado que el espacio-tiempo background es isotrópico y homogéneo, los 4-vectores y tensores del background son de la forma

$$\bar{A}^a = (A^0, 0), \qquad \bar{A}^a{}_b = \begin{bmatrix} \bar{A}^0{}_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\delta^\mu_\nu \bar{A}^\kappa{}_\kappa \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

donde todas las cantidades son sólo funciones del tiempo conformal η.
Las reglas de transformación para las componentes de las perturbaciones quedan

Escalares

Una perturbación escalar δs definida por $s = \bar{s} + \delta s$ cambia como

$$\hat{\delta}s = \delta s - \bar{s}'\xi^0. \tag{4.25}$$

4-vectores

Una perturbación 4-vectorial definida por $A^a = \bar{A}^a + \delta A^a$ cambia como

$$\hat{\delta}A^a = \delta A^a + \xi^a{}_{,b}\bar{A}^b - \bar{A}^a{}_{,b}\xi^b, \tag{4.26}$$

en componentes

$$\hat{\delta}A^0 = \delta A^0 + \xi^0{}_{,0}\bar{A}^0 - \bar{A}^0{}_{,0}\xi^0 \tag{4.27}$$
$$\hat{\delta}A^\mu = \delta A^\mu + \xi^\mu{}_{,0}\bar{A}^0. \tag{4.28}$$

4-tensores (1,1)

Una perturbación 4-tensorial (1,1) definida por $A^a{}_b = \bar{A}^a{}_b + \delta A^a{}_b$ queda como

$$\hat{\delta}A^a{}_b = \delta A^a{}_b + \xi^a{}_{,c}\bar{A}^c{}_b - \xi^c{}_{,b}\bar{A}^a{}_c - \bar{A}^a{}_{b,c}\xi^c, \tag{4.29}$$

en componentes

$$\hat{\delta}A^0{}_0 = \delta A^0{}_0 - \bar{A}^0{}_{0,0}\xi^0 \tag{4.30}$$
$$\hat{\delta}A^0{}_\mu = \delta A^0{}_\mu + \frac{1}{3}\xi^0{}_{,\mu}\bar{A}^\kappa{}_\kappa - \xi^0{}_{,\mu}\bar{A}^0{}_0 \tag{4.31}$$
$$\hat{\delta}A^\mu{}_0 = \delta A^\mu{}_0 + \xi^\mu{}_{,0}\bar{A}^\kappa{}_\kappa - \frac{1}{3}\xi^\mu{}_{,0}\bar{A}^0{}_0 \tag{4.32}$$
$$\hat{\delta}A^\mu{}_\nu = \delta A^\mu{}_\nu - \frac{1}{3}\delta^\mu_\nu\bar{A}^\kappa{}_{\kappa,0}\xi^0. \tag{4.33}$$

En particular, las partes con traza y sin traza transforman como

$$\hat{\delta} A^{\kappa}{}_{\kappa} = \delta A^{\kappa}{}_{\kappa} - \bar{A}^{\kappa}{}_{\kappa,0}\,\xi^0 \tag{4.34}$$

$$\hat{\delta} A^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{3}\hat{\delta} A^{\kappa}{}_{\kappa} = \delta A^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{3}\delta A^{\kappa}{}_{\kappa}, \tag{4.35}$$

de la ecuación anterior se puede ver que la parte sin traza es un invariante gauge.

4.1.2 Perturbaciones del tensor métrico

La métrica del universo perturbado se define como

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + \delta g_{ab} = a^2(\eta_{ab} + h_{ab}), \tag{4.36}$$

donde $g_{ab} = a^2\eta_{ab}$ es la métrica FLRW no perturbada y h_{ab} es una perturbación a primer orden. La inversa de la métrica es

$$g^{ab} \equiv a^{-2}(\eta^{ab} - h^{ab}), \tag{4.37}$$

donde la inversa de la perturbación de la métrica a primer orden es

$$h^{ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}. \tag{4.38}$$

Realizando la descomposición SVT a la perturbación de la métrica se obtiene

$$h_{ab} = \begin{bmatrix} -2A & -B_\mu \\ -B_\mu & -2D\delta_{\mu\nu} + 2E_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

donde $D \equiv -\frac{1}{6}h^{\mu}{}_{\mu}$ lleva la traza de la perturbación espacial $h_{\mu\nu}$, $E_{\mu\nu}$ es un tensor sin traza, B_μ es el vector de desplazamiento A es la función lapso [54]. La inversa es

$$h^{ab} = \begin{bmatrix} -2A & B_\mu \\ B_\mu & -2D\delta_{\mu\nu} + 2E_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \tag{4.40}$$

en términos del tiempo conformal el elemento de línea es

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2A)d\eta^2 - 2B_\mu d\eta dx^\mu + [(1-2D)\delta_{\mu\nu} + 2E_{\mu\nu}]dx^\mu dx^\nu]. \tag{4.41}$$

La perturbación vectorial se divide en partes sin rotacional y sin divergencia

$$B_\mu = -B_{,\mu} + B^V_\mu, \tag{4.42}$$

donde B es un escalar y $\delta^{\mu\nu}B^V_{\mu}{}_{,\nu} = 0$. La parte tensorial $E_{\mu\nu}$ se descompone en sus partes escalar, vectorial y tensorial como

$$E_{\mu\nu} = E^S_{\mu\nu} + E^V_{\mu\nu} + E^T_{\mu\nu}, \tag{4.43}$$

donde

$$E^S_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)E, \tag{4.44}$$

$$E^V_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu E_\nu + \nabla_\nu E_\mu), \quad \text{donde} \quad \delta^{\mu\nu}E_{\mu,\nu} = 0, \tag{4.45}$$

se puede ver que $E^S_{\mu\nu}$ es simétrico y sin traza, $E^V_{\mu\nu}$ es simétrico, sin traza y sin divergencia, y la parte tensorial tiene las propiedades

$$\delta^{\mu\kappa}E^T_{\mu\nu},_\kappa = 0, \qquad \delta^{\mu\nu}E^T_{\mu\nu} = 0, \tag{4.46}$$

donde $E^T_{\mu\nu}$ es transversal y sin traza.
La métrica perturbada tiene 4 escalares (A, B, D, E), 2 vectores (B_μ, E_μ) y un solo tensor $E_{\mu\nu}$ [57]. Cada escalar tiene un grado de libertad, cada vector tiene 2 grados de libertad y la parte tensorial tiene 2 grados de libertad, por lo cual hace que las componentes de la métrica perturbada tenga en total 10 grados de libertad. Las perturbaciones escalares son las más importantes, ya que estás se acoplan a las perturbaciones de densidad y presión del tensor momentum-energía y son el factor de la formación de estructuras [57]. Las perturbaciones vectoriales tienden a decaer en un universo en expansión, y las tensoriales son ondas gravitacionales.

Transformaciones gauge de las perturbaciones de la métrica

Al aplicar la ecuación (4.23) a la perturbación de la métrica se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\delta}g_{ab} &= \delta g_{ab} - \xi^c,_a \bar{g}_{cb} - \xi^d,_b \bar{g}_{ad} - \xi^e \bar{g}_{ab},_e \\ &= \delta g_{ab} - a^2(\xi^c,_a \eta_{cb} + \xi^d,_b \eta_{ad} + 2\mathcal{H}\eta_{ab}\xi^0),\end{aligned} \tag{4.47}$$

Aplicando la ley de transformación gauge a las diferentes componentes se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\delta}g_{00} \equiv -2a^2\hat{A} &= \delta g_{00} - a^2(\xi^c,_0 \eta_{c0} + \xi^d,_0 \eta_{0d} + 2\mathcal{H}\eta_{00}\xi^0) \\ &= -2a^2(A - \xi^0,_0 - \mathcal{H}\xi^0),\end{aligned} \tag{4.48}$$

por lo cual, la ley de transformación gauge es

$$\hat{A} = A - \xi^0,_0 - \mathcal{H}\xi^0. \tag{4.49}$$

Análisis similar para las otras perturbaciones dan

$$\hat{B}_\mu = B_\mu + \xi^\mu,_0 - \xi^0,_\mu \tag{4.50}$$

$$\hat{D} = D - \frac{1}{3}\xi^\kappa,_\kappa + \mathcal{H}\xi^0 \tag{4.51}$$

$$\hat{E}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\xi^\mu,_\nu + \xi^\nu,_\mu) + \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\xi^\kappa,_\kappa \tag{4.52}$$

4.1.3 Perturbaciones Escalares

Para describir la evolución de las perturbaciones en la densidad de materia[5], solo se consideran perturbaciones escalares. La métrica mas general para el universo perturbado involucrando solamente perturbaciones escalares es

$$\begin{aligned}ds^2 = a^2(\eta)\Big[&- (1+2A)d\eta^2 + 2B,_\mu d\eta dx^\mu \\ &+ \left[(1-2D)\delta_{\mu\nu} + 2\left(\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{3}\nabla^2\right)E\right]dx^\mu dx^\nu\Big].\end{aligned} \tag{4.53}$$

[5]Para mayor detalle ver el siguiente capitulo.

Se define la perturbación de curvatura como

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E, \tag{4.54}$$

quedando la métrica como

$$ds^2 = a^2(\eta)\Big[-(1+2A)d\eta^2 + 2B_{,\mu}\, d\eta dx^\mu + [(1-2\psi)\delta_{\mu\nu} + 2E_{,\mu\nu}]\, dx^\mu dx^\nu\Big]. \tag{4.55}$$

Para evitar perturbaciones vectoriales que puedan surgir de las perturbaciones escalares en B,D y E. Se divide la parte espacial ξ^μ de la manera usual, es decir, una parte sin rotacional y una sin divergencia

$$\xi^\mu = \xi^\mu_\perp - \delta^{\mu\nu}\xi_\nu, \quad \text{con} \quad \xi^\mu_\perp{}_{,\mu} = 0. \tag{4.56}$$

La parte puramente vectorial $\xi^\mu_\perp$ es la responsable de los grados de libertad gauge puramente vectoriales los cuales van decayendo, por lo cual se prescindirá el término $\xi^\mu_\perp$. Las transformaciones gauge escalares están completamente especificadas por las funciones ξ^0 y ξ,

$$\hat{\eta} = \eta + \xi^0, \tag{4.57}$$
$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \delta^{\mu\nu}\xi_\nu. \tag{4.58}$$

Aplicando perturbaciones escalares y transformaciones gauge a las ecuaciones de transformación (4.49 - 4.52) se tiene

$$\hat{A} = A - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \tag{4.59}$$
$$\hat{B} = B + \xi^0 + \xi', \tag{4.60}$$
$$\hat{D} = D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \mathcal{H}\xi^0, \tag{4.61}$$
$$\hat{E} = E + \xi, \tag{4.62}$$
$$\hat{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0. \tag{4.63}$$

Ahora, se escoge un gauge específico, el *gauge de Newton conforme*, el cual consiste en tomar $B = E = 0$. De las ecuaciones anteriores se ve que esto se cumple escogiendo

$$\xi = -E, \qquad \text{y} \qquad \xi^0 = -B + E'. \tag{4.64}$$

Esta elección de gauge da[6]

$$A^N = A + (B - E')' + \mathcal{H}(B - E') \tag{4.65}$$
$$D^N = \psi^N = D + \frac{1}{3}\nabla^2 E + \mathcal{H}(-B + E') = \psi - \mathcal{H}(B - E'). \tag{4.66}$$

Se definen las cantidades Φ y Ψ (conocidos como potenciales de Bardeen) como

$$\Phi \equiv A + (B - E')' + \mathcal{H}(B - E') \tag{4.67}$$
$$\Psi \equiv \psi - \mathcal{H}(B - E'). \tag{4.68}$$

Estas cantidades son invariantes bajo transformaciones gauge. En este gauge $\Phi = A^N$ y $\Psi = \psi^N$.

[6]El superíndice N denota el gauge de Newton conforme

La métrica en el gauge de Newton conforme es

$$g_{ab} = a^2 \begin{bmatrix} -1-2\Phi & 0 \\ 0 & (1-2\Psi)\delta_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g^{ab} = a^{-2} \begin{bmatrix} -1+2\Phi & 0 \\ 0 & (1+2\Psi)\delta_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \tag{4.69}$$

o escribiendo solo la métrica perturbada

$$h_{ab} = \begin{bmatrix} -2\Phi & 0 \\ 0 & -2\Psi\delta_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad h^{ab} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 \\ 0 & 2\Psi\delta_{\mu\nu} \end{bmatrix}. \tag{4.70}$$

El elemento de línea en el gauge de Newton conforme es

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2\Phi)d\eta^2 + (1-2\Psi)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu] \tag{4.71}$$

4.1.4 Perturbaciones escalares en los tensores de curvatura en el gauge de Newton conforme

De la métrica en el gauge de Newton conforme se obtiene los coeficientes de conexión

$$\begin{aligned} &\Gamma^0{}_{00} = \mathcal{H} + \Phi', \quad \Gamma^0{}_{0\mu} = \Phi,_\mu\,, \qquad \Gamma^0{}_{\mu\nu} = \mathcal{H}\delta_{\mu\nu} - [2\mathcal{H}(\Phi+\Psi) + \Psi']\delta_{\mu\nu}, \\ &\Gamma^\mu{}_{00} = \Phi,_\mu\,, \qquad \Gamma^\mu{}_{0\nu} = \mathcal{H}\delta^\mu_\nu - \Psi'\delta^\mu_\nu, \quad \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} = -(\Psi,_\kappa\,\delta^\mu_\nu + \Psi,_\nu\,\delta^\mu_\kappa) + \Psi,_\mu\,\delta_{\nu\kappa}, \end{aligned} \tag{4.72}$$

donde $\Gamma^a{}_{bc} = \bar{\Gamma}^a{}_{bc} + \delta\Gamma^a{}_{bc}$, por lo cual se ve que,

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}^0{}_{00} = \mathcal{H}, \qquad \bar{\Gamma}^0{}_{0\mu} = 0, \qquad \bar{\Gamma}^0{}_{\mu\nu} = \mathcal{H}\delta_{\mu\nu}, \\ &\bar{\Gamma}^\mu{}_{00} = 0, \qquad \bar{\Gamma}^\mu{}_{0\nu} = \mathcal{H}\delta^\mu_\nu, \qquad \bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\kappa} = 0, \end{aligned} \tag{4.73}$$

y

$$\begin{aligned} &\delta\Gamma^0{}_{00} = \Phi', \qquad \delta\Gamma^0{}_{0\mu} = \Phi,_\mu\,, \qquad \delta\Gamma^0{}_{\mu\nu} = -[2\mathcal{H}(\Phi+\Psi) + \Psi']\delta_{\mu\nu}, \\ &\delta\Gamma^\mu{}_{00} = \Phi,_\mu\,, \quad \delta\Gamma^\mu{}_{0\nu} = -\Psi'\delta^\mu_\nu, \quad \delta\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} = -(\Psi,_\kappa\,\delta^\mu_\nu + \Psi,_\nu\,\delta^\mu_\kappa) + \Psi,_\mu\,\delta_{\nu\kappa}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

El tensor de Ricci $R_{ab} = \bar{R}_{ab} + \delta R_{ab}$ es

$$R_{ab} = \Gamma^c{}_{ba},_c - \Gamma^c{}_{ca},_b + \Gamma^c{}_{cd}\Gamma^d{}_{ba} - \Gamma^c{}_{bd}\Gamma^d{}_{ca}, \tag{4.75}$$

calculando las componentes se obtiene

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' + 3\Psi'' + \nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') \tag{4.76}$$

$$R_{0\mu} = 2(\Psi' + \mathcal{H}\Phi),_\mu \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = {} & (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} \\ & + [-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' + 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)(\Phi+\Psi)]\delta_{\mu\nu} \\ & + (\Psi - \Phi),_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Subiendo el primer índice del tensor de Ricci da

$$R^a{}_b = g^{ac}R_{cb} = (\bar{g}^{ac} + \delta g^{ac})(\bar{R}_{cb} + \delta R_{cb}) = \bar{R}^a{}_b + \delta g^{ac}\bar{R}_{cb} + \bar{g}^{ac}\delta R_{cb}, \tag{4.79}$$

obteniendo las componentes

$$R^0{}_0 = 3a^{-2} + a^{-2}[-3\Psi'' - \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') - 6\mathcal{H}'\Phi] \tag{4.80}$$
$$R^0{}_\mu = -2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,\mu} \tag{4.81}$$
$$R^\mu{}_0 = -R^0{}_\mu = 2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,\mu} \tag{4.82}$$
$$\begin{aligned} R^\mu{}_\nu &= a^{-2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} \\ &\quad + a^{-2}[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' + 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi)]\delta_{\mu\nu} \\ &\quad + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{4.83}$$

El escalar de Ricci es

$$\begin{aligned} R &= R^0{}_0 + R^\mu{}_\mu \\ &= 6a^{-2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \\ &\quad + a^{-2}[-6\Psi'' + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi]. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Finalmente, para el tensor de Einstein $G^a{}_b = R^a{}_b - \frac{1}{2}\delta^a_b R$ se tiene

$$G^0{}_0 = -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] \tag{4.85}$$
$$G^0{}_\mu = R^0{}_\mu \tag{4.86}$$
$$G^\mu{}_0 = R^\mu{}_0 \tag{4.87}$$
$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu &= a^{-2}(-2\mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} \\ &\quad + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\ &\quad + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Estas son las componentes del tensor de Einstein en el gauge de Newton conforme.

4.1.5 Perturbaciones en el tensor Momentum-Energía

El tensor de momentum-energía del background está dado por [61]

$$\bar{T}^{ab} = (\bar\rho + \bar p)\bar u^a \bar u^b + \bar p \bar g^{ab} \tag{4.89}$$
$$\bar{T}^a{}_b = (\bar\rho + \bar p)\bar u^a \bar u_b + \bar p \delta^a_b, \tag{4.90}$$

debido a la homogeneidad $\bar\rho = \bar\rho(\eta)$ y $\bar p = \bar p(\eta)$. Debido a la isotropía, el fluido está en reposo en el background $\bar u^a = (\bar u^0, 0, 0, 0)$. Se sabe que

$$\bar u^a \bar u_a = a^2 \eta_{ab} \bar u^a \bar u^b = -a^2(\bar u^0)^2 = -1, \tag{4.91}$$

así que

$$\bar u^a = a^{-1}(1, 0, 0, 0), \qquad \bar u_a = a(-1, 0, 0, 0). \tag{4.92}$$

El tensor total de momentum-energía se divide en su partes background y perturbada como

$$T^a{}_b = \bar T^a{}_b + \delta T^a{}_b. \tag{4.93}$$

Igual que en la perturbación de la métrica, la perturbación en el tensor momentum-energía tiene 10 grados de libertad. Éste también puede dividirse en escalar+vectorial +tensorial, con $4+4+2$ grados de libertad. La perturbación también puede dividirse en fluido perfecto+ no perfecto, con $5+5$ grados de libertad.

Ademas, para las perturbaciones de la densidad, presión y velocidad se tiene

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \tag{4.94}$$

$$p = \bar{p} + \delta p \tag{4.95}$$

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu = \delta u^\mu \equiv a^{-1} v^\mu, \tag{4.96}$$

donde se ha usado el hecho que $u_\mu = 0$. Se escriben las velocidades en términos de v^μ,

$$u^a = \bar{u}^a + \delta u^a \equiv a^{-1}(1 + a\delta u^0, v^1, v^2, v^3) \tag{4.97}$$

$$u_a = \bar{u}_a + \delta u_a \equiv (-a + \delta u_0, \delta u_1, \delta u_2, \delta u_3), \tag{4.98}$$

las cuales están relacionadas por $u^b = g^{ab} u_a$ y $u^a u_a = -1$. Usando la métrica perturbada general se encuentra (a primer orden)

$$u_0 = g_{0a} u^a = -a - a^2 \delta u^0 - 2aA, \tag{4.99}$$

de lo cual se ve que

$$\delta u_0 = -a^2 \delta u^0 - 2aA. \tag{4.100}$$

Similarmente

$$u_\mu = \delta u_\mu = g_{\mu a} u^a = -aB_\mu + a v_\mu. \tag{4.101}$$

Ademas del hecho que $u^a u_a = -1$, se obtiene

$$\delta u^0 = -a^{-1} A. \tag{4.102}$$

Así que las 4-velocidades son

$$u^a = a^{-1}(1 - A, v_\mu) \tag{4.103}$$

$$u_a = a(-1 - A, v_\mu - B_\mu). \tag{4.104}$$

El tensor de momentum-energía queda

$$\begin{aligned} T^a{}_b &= \bar{T}^a{}_b + \delta T^a{}_b \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta_{\mu\nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho}+\bar{p})(v_\mu - B_\mu) \\ -(\bar{\rho}+\bar{p}) v_\mu & \delta p \delta^\mu_\nu + \Sigma_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.105}$$

donde se ha definido

$$\delta T^\mu{}_\nu \equiv \delta p \delta^\mu_\nu + \Sigma_{\mu\nu} \equiv \bar{p}\left(\frac{\delta p}{\bar{p}} + \Pi_{\mu\nu}\right). \tag{4.106}$$

Donde $\Sigma_{\mu\nu}$, $\Pi_{\mu\nu}$ son simétricas y sin traza, con lo cual se puede escribir la perturbación de la presión como una traza

$$\delta p \equiv \frac{1}{3} \delta T^\kappa{}_\kappa \tag{4.107}$$

y se define la presión anisotrópica como la parte sin traza

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \delta T^\mu{}_\nu - \frac{1}{3} \delta^\mu_\nu \delta T^\kappa{}_\kappa. \tag{4.108}$$

La perturbación de la velocidad v_μ y el 3-tensor $\Pi_{\mu\nu}$ también pueden descomponerse en la forma SVT.

Transformaciones gauge del tensor de energía

Las perturbaciones del tensor momentum-energía obedecen las reglas de transformación (4.30), (4.32), (4.35). Con lo cual

$$\hat{\delta}T^0{}_0 = -\hat{\delta}\rho = -\delta\rho + \bar{\rho}' + \xi^0 \tag{4.109}$$
$$\hat{\delta}T^\mu{}_0 = -(\bar{\rho}+\bar{p})\hat{v}_\mu = -(\bar{\rho}+\bar{p})v_\mu - \xi^\mu{}_{,0}\,(\bar{\rho}+\bar{p}) \tag{4.110}$$
$$\frac{1}{3}\hat{\delta}T^\kappa{}_\kappa = \hat{\delta}p = \frac{1}{3}(\delta T^\kappa{}_\kappa - \bar{T}^\kappa{}_{\kappa,0}\,\xi^0) = \delta p - \bar{p}'\xi^0 \tag{4.111}$$
$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu}, \tag{4.112}$$

o equivalentemente

$$\hat{\delta}\rho = \delta\rho - \bar{\rho}' + \xi^0 \tag{4.113}$$
$$\hat{\delta}p = \delta p - \bar{p}' + \xi^0 \tag{4.114}$$
$$\bar{v}_\mu = v_\mu + \xi^\mu{}_{,0} \tag{4.115}$$
$$\hat{\delta} \equiv \frac{\hat{\delta}\rho}{\bar{\rho}} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\xi^0 = \delta + 3\mathcal{H}(1+\omega)\xi^0, \tag{4.116}$$

donde δ es la *perturbación de la densidad de energía relativa*.

4.1.6 Ecuaciones de Einstein en el gauge de Newton conforme

En esta tesis se encontrarán las perturbaciones cosmológicas en el gauge de Newton conforme. Este gauge no es la única elección posible (gauge comóvil, gauge sincrono, entre otros), pero dadas las relaciones de transformaciones gauge, en principio, es posible relacionar las cantidades para cada gauge [60, 10]. Por tanto, los resultados encontrados en la tesis son generales y no están restringidos a este gauge en específico.

La ecuación perturbada de Einstein es

$$\delta G_{ab} = 8\pi\delta T_{ab}. \tag{4.117}$$

Antes de escribir las componentes de Einstein perturbadas es necesario encontrar las perturbaciones escalares del tensor momentum-energía en el gauge de Newton conforme. En este gauge $v^N_\mu = -v,^N_\mu$ y $B^N_\mu = B,^N_\mu = 0$. Ademas, la parte escalar de la descomposición SVT de $\Pi_{\mu\nu}$ es

$$\Pi^S_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi. \tag{4.118}$$

Como se están considerando solamente las perturbaciones escalares no se tienen en cuenta las partes vectoriales y tensoriales de $\Pi_{\mu\nu}$, quedando el tensor momentum-energía como

$$\delta T^a_{\ b} = \begin{bmatrix} -\delta\rho & -(\bar{\rho}+\bar{p})v,_{\mu} \\ (\bar{\rho}+\bar{p})v,_{\mu} & \delta p\delta^{\mu}_{\nu} + \bar{p}\left(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi\right) \end{bmatrix}. \tag{4.119}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y las ecuaciones (4.85) - (4.88), las ecuaciones de Friedmann perturbadas quedan

$$3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - \nabla^2\Psi = -4\pi a^2\delta\rho \tag{4.120}$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi),_{\mu} = 4\pi a^2(\bar{\rho}+\bar{p})v,_{\mu} \tag{4.121}$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi a^2\delta p \tag{4.122}$$

$$(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \frac{1}{3}\delta^{\mu}_{\nu}\nabla^2)(\Psi - \Phi) = 8\pi a^2\bar{p}(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \frac{1}{3}\delta^{\mu}_{\nu}\nabla^2)\Pi, \tag{4.123}$$

donde la primera ecuación es la componente $(0-0)$, la segunda la componente $(0-\mu)$, la tercera la parte de la traza de la componente $(\mu-\nu)$ y la cuarta la parte sin traza de la componente $(\mu-\nu)$.
La parte fuera de la diagonal de la última ecuación da

$$\Psi - \Phi = 8\pi a^2\bar{p}\Pi. \tag{4.124}$$

Para el fluido perfecto, $\Pi = 0$, llegando a la relación

$$\Psi = \Phi. \tag{4.125}$$

4.2 Ecuaciones de continuidad de momentum-energía en el gauge de Newton conforme

La ecuación de conservación de momentum-energía es

$$\nabla_a T^a_{\ b} = \partial_a T^a_{\ b} + \Gamma^a_{\ ca}T^c_{\ b} - \Gamma^c_{\ ba}T^a_{\ c} = 0, \tag{4.126}$$

con la cual se pueden calcular (ver apéndice H), la ecuación de energía perturbada

$$\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\bar{\rho}+\bar{p})(\nabla^2 v + 3\Psi') \tag{4.127}$$

y la ecuación de momentum perturbada

$$(\bar{\rho}+\bar{p})v' = (\bar{\rho}+\bar{p})'v - 4\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v + \delta p + \frac{2}{3}\bar{p}\nabla^2\Pi + (\bar{\rho}+\bar{p})\Phi. \tag{4.128}$$

En la ecuación de conservación de perturbación de energía (4.127), el primer término de la derecha implica la expansión del espacio-tiempo de fondo, luego el efecto de la divergencia de la velocidad (expansión local del fluido) y por último el efecto de la expansión o contracción debida a la perturbación de la métrica.
En la ecuación de perturbación del momentum (4.128), el lado izquierdo y el primer término de la derecha representa el cambio en inercia × velocidad. El segundo término es el efecto de la expansión del fondo, el tercero y los últimos términos representan fuerzas debido a los gradientes de presión y al potencial gravitacional.

Teniendo en cuenta la ecuación de estado

$$w \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}, \tag{4.129}$$

las ecuaciones de conservación se pueden reescribr de la siguiente forma (ver apéndice H)

$$\delta' = (1+w)(\nabla^2 v + 3\Psi') + 3\mathcal{H}(w\delta - \frac{\delta p}{\bar{\rho}}) \tag{4.130}$$

y

$$v' = -\mathcal{H}(1-3w)v - \frac{w'}{1+w}v + \frac{\delta p}{\bar{\rho}(1+w)} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi. \tag{4.131}$$

4.3 Perturbaciones en Brans-Dicke en el gauge de Newton conforme

Ya se calcularon las ecuaciones de campo de Einstein perturbadas, ahora la idea es calcular las ecuaciones de campo de Brans-Dicke perturbadas. Para esto, se perturban las ecuaciones de campo de BD

$$\begin{aligned} G^a{}_b\phi = 8\pi T^a_{\ b} + \frac{\omega}{\phi}\left(g^{ac}\nabla_c\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}\delta^a{}_b\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) \\ + (g^{ca}\nabla_c\nabla_b\phi - \delta^a{}_b\Box\phi) - \frac{V(\phi)}{2}\delta^a{}_b. \end{aligned}$$

Hay dos maneras de perturbar las ecuaciones de campo, dependiendo de como estén escritas las ecuaciones (de la forma anterior o como (2.65) en componentes mixtas). La diferencia radica en la perturbación del campo escalar, por lo cual, el procedimiento subsecuente es igual en ambas formas.
Se calculan las componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio de las ecuaciones de campo, sin realizar perturbaciones en el campo escalar [7].
La componente tiempo-tiempo de las ecuaciones de campo queda

$$\begin{aligned} G^0{}_0\phi = 8\pi T^0_{\ 0} + \frac{\omega}{\phi}\left(g^{00}(\phi')^2 - \frac{1}{2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) \\ + \left(g^{c0}\nabla_c\phi' - \Box\phi\right) - \frac{V(\phi)}{2}. \end{aligned}$$

Las siguientes relaciones perturbadas a primer orden se usarán a lo largo del cálculo (ver apéndice F)

$$g^{oc}\nabla_c\phi' = a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'' + (\mathcal{H}+\Phi')\phi' - 2\Phi\mathcal{H}\phi' + \Phi,_\mu\partial_\mu\phi] \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned} g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi = a^{-2}[(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi'\phi'\delta_{\mu\nu} \\ + \Psi,_\nu\partial_\mu\phi + \Psi,_\mu\partial_\nu\phi - \Psi,_\lambda\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu}] \end{aligned} \tag{4.133}$$

$$\begin{aligned} \Box\phi = a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'' + \nabla^2\phi(1+2\Psi) + \partial_\mu\phi(\Phi,_\mu - \Psi,_\mu) \\ + 2\mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi) + \phi'(3\Psi'+\Phi')] \end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\nabla^c\phi\nabla_c\phi = a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'^2 + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2], \tag{4.135}$$

[7] Primero se calculan las perturbaciones sin perturbar el campo escalar, luego se calculan introduciendo la perturbación escalar.

donde $(\partial\phi)^2 = \delta_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Reemplazando las relaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}
G^0{}_0\phi &= 8\pi T^0_0 + \frac{\omega a^{-2}}{\phi}\left((-1+2\Phi)(\phi')^2 - \frac{1}{2}((-1+2\Phi)\phi'^2 + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2)\right) \\
&\quad + a^{-2}\left[(-1+2\Phi)\phi'' + (\mathcal{H}+\Phi')\phi' - 2\Phi\mathcal{H}\phi' + \Phi,_\mu\partial_\mu\phi\right. \\
&\quad -(-1+2\Phi)\phi'' - \nabla^2\phi(1+2\Psi) - \partial_\mu\phi(\Phi,_\mu - \Psi,_\mu) \\
&\quad \left. -2\mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi) - \phi'(3\Psi'+\Phi')\right] - \frac{V(\phi)}{2} \\
&= 8\pi T^0_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\phi}[(-1+2\Phi)(\phi')^2 - (1+2\Psi)(\partial\phi)^2] \\
&\quad + a^{-2}[3\mathcal{H}\phi' - 6\mathcal{H}\phi'\Phi - \nabla^2\phi(1+2\Psi) + \partial_\mu\phi\Psi,_\mu - 3\phi'\Psi'] - \frac{V(\phi)}{2}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la componente (0-0) del tensor de Einstein perturbada (4.85) y la del tensor momentum-energía (4.119) se tiene

$$\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi])\phi \\
&= -8\pi(\bar{\rho}+\delta\rho) + \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\phi}[(-1+2\Phi)(\phi')^2 - (1+2\Psi)(\partial\phi)^2] \\
&\quad + a^{-2}[3\mathcal{H}\phi' - 6\mathcal{H}\phi'\Phi - \nabla^2\phi(1+2\Psi) + \partial_\mu\phi\Psi,_\mu - 3\phi'\Psi'] \\
&\quad - \frac{V(\phi)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.136}$$

La ecuación de campo perturbada para la componente espacio-espacio es

$$\begin{aligned}
G^\mu{}_\nu\phi &= 8\pi T^\mu{}_\nu + \frac{\omega}{\phi}\left(g^{\mu c}\nabla_c\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) \\
&\quad + (g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu\Box\phi) - \frac{V(\phi)}{2}\delta^\mu{}_\nu \\
&= 8\pi T^\mu{}_\nu + \frac{\omega}{\phi}\left(g^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) \\
&\quad + (g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu\Box\phi) - \frac{V(\phi)}{2}\delta^\mu{}_\nu.
\end{aligned}$$

Se reemplazan las relaciones (4.133) - (4.135), para obtener

$$\begin{aligned}
G^\mu{}_\nu\phi &= 8\pi T^\mu{}_\nu + \frac{\omega a^{-2}}{\phi}\Big((1+2\Psi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}((-1+2\Phi)\phi'^2 \\
&\quad + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2)\Big) + a^{-2}\Big((1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi'\phi'\delta_{\mu\nu} \\
&\quad + \Psi,_\nu\partial_\mu\phi + \Psi,_\mu\partial_\nu\phi - \Psi,_\lambda\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu} - (-1+2\Phi)\phi''\delta_{\mu\nu} - (1+2\Psi)\nabla^2\phi\delta_{\mu\nu} \\
&\quad - \partial_\lambda\phi(\Phi,_\lambda - \Psi,_\lambda)\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} - \phi'(3\Psi'+\Phi')\delta_{\mu\nu}\Big) - \frac{V}{2}\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la componente $(\mu - \nu)$ del tensor de Einstein perturbado (4.88) y del tensor momentum-energía (4.119) se tiene

$$\begin{aligned}
&(a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi),_{\mu\nu})\phi = 8\pi(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) \\
&+ \frac{\omega a^{-2}}{\phi}\Big((1 + 2\Psi)(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial\phi)^2) - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(-1 + 2\Phi)\phi'^2\Big) \\
&+ a^{-2}\Big((1 + 2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \nabla^2\phi\delta_{\mu\nu}) - (-1 + 2\Phi)\phi''\delta_{\mu\nu} - \mathcal{H}\phi'(-1 + 2\Phi)\delta_{\mu\nu} \\
&- \phi'(2\Psi' + \Phi')\delta_{\mu\nu} + \Psi,_\nu\partial_\mu\phi + \Psi,_\mu\partial_\nu\phi - \Phi,_\lambda\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu}\Big) - \frac{V}{2}\delta_{\mu\nu}. \qquad (4.137)
\end{aligned}$$

El procedimiento mostrado hasta ahora (componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio) no tiene en cuenta las perturbaciones del campo escalar.
La perturbación del campo escalar es

$$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi. \qquad (4.138)$$

La expansión del potencial a primer orden es [62]

$$V(\phi) = V(\bar{\phi} + \delta\phi) = V(\bar{\phi}) + V_\phi\delta\phi = \bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi, \qquad (4.139)$$

donde $V_\phi = \dfrac{\partial V}{\partial\phi}$. Las derivadas del potencial son

$$V_\phi = \frac{\partial V(\bar{\phi} + \delta\phi)}{\partial\phi} = \frac{\partial V(\bar{\phi})}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi \equiv \bar{V}_\phi + \bar{V}_{\phi\phi}\delta\phi \qquad (4.140)$$

$$V_{\phi\phi} = \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} = \bar{V}_{\phi\phi} + \bar{V}_\phi^{(3)}\delta\phi. \qquad (4.141)$$

Las siguientes relaciones son perturbaciones lineales relacionadas al campo escalar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi} &= (\bar{\phi} + \delta\phi)^{-1} = \bar{\phi}^{-1}\left(1 + \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)^{-1} = \frac{1}{\bar{\phi}}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right) \\
\frac{1}{\phi^2} &= (\bar{\phi} + \delta\phi)^{-2} = \bar{\phi}^{-2}\left(1 + \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)^{-2} = \frac{1}{\bar{\phi}^2}\left(1 - 2\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right) \\
(\partial\phi)^2 &= \delta^{\mu\nu}\partial_\mu(\bar{\phi} + \delta\phi)\partial_\nu(\bar{\phi} + \delta\phi) = 0 \qquad (4.142) \\
\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi &= \partial_\mu(\bar{\phi} + \delta\phi)\partial_\nu(\bar{\phi} + \delta\phi) = 0 \\
\nabla^2\phi &= \nabla^2(\bar{\phi} + \delta\phi) = \nabla^2\delta\phi \\
\partial_\mu\partial_\nu\phi &= \partial_\mu\partial_\nu(\bar{\phi} + \delta\phi) = \partial_\mu\partial_\nu\delta\phi.
\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, se van a mostrar las dos maneras de perturbar las ecuaciones de campo.

4.3.1 I-Forma

Reemplazando las relaciones (4.142) y la definición del potencial (4.139) en la ecuación perturbada (4.136) se tiene

$$
\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi])(\bar{\phi} + \delta\phi) \\
&= -8\pi(\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\bar{\phi}}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)[(-1 + 2\Phi)(\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\delta\phi')] \\
&\quad + a^{-2}[3\mathcal{H}(\bar{\phi}' + \delta\phi') - 6\mathcal{H}(\bar{\phi}' + \delta\phi')\Phi - \nabla^2\delta\phi(1 + 2\Psi) \\
&\quad + \partial_\mu(\bar{\phi} + \delta\phi)\Psi,_\mu - 3(\bar{\phi}' + \delta\phi')\Psi'] - \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi).
\end{aligned}
$$

Despreciando términos de orden superior, se llega a

$$
\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi])\bar{\phi} - 3a^{-2}\mathcal{H}^2\delta\phi = -8\pi(\bar{\rho} + \delta\rho) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\bar{\phi}}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)[-\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\Phi\bar{\phi}'^2] \\
&+ a^{-2}[3\mathcal{H}(\bar{\phi}' + \delta\phi') - 6\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi - \nabla^2\delta\phi - 3\bar{\phi}'\Psi'] - \frac{1}{2}\left(\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi\right).
\end{aligned}
$$

Distribuyendo el término entre paréntesis que multiplica a ω se obtiene

$$
\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi])\bar{\phi} - 3a^{-2}\mathcal{H}^2\delta\phi = -8\pi(\bar{\rho} + \delta\rho) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\bar{\phi}}[-\bar{\phi}'^2 + \frac{\bar{\phi}'^2}{\bar{\phi}}\delta\phi - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\Phi\bar{\phi}'^2] \\
&+ a^{-2}[3\mathcal{H}(\bar{\phi}' + \delta\phi') - 6\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi - \nabla^2\delta\phi - 3\bar{\phi}'\Psi'] - \frac{1}{2}\left(\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi\right).
\end{aligned}
$$

Si se tiene en cuenta la ecuación del background de Friedmann (0-0) (3.23), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente tiempo-tiempo es

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\bar{\phi} - 3\mathcal{H}^2\delta\phi = -8\pi a^2\delta\rho \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\omega}{\bar{\phi}}\left(\frac{\bar{\phi}'^2}{\bar{\phi}}\delta\phi - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\bar{\phi}'^2\Phi\right) + 3\mathcal{H}\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi \\
&- \nabla^2\delta\phi - 3\bar{\phi}'\Psi' - \frac{a^2}{2}\bar{V}_\phi\delta\phi.
\end{aligned}
}
\tag{4.143}
$$

Ahora se perturba el campo escalar para la componente espacio-espacio. Para esto, se usan las relaciones (4.142) para el campo escalar en la ecuación (4.137)

$$
\begin{aligned}
&(a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi),_{\mu\nu})(\bar{\phi} + \delta\phi) = 8\pi(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) \\
&- \frac{\omega a^{-2}}{2\bar{\phi}}\left(-1 + 2\Phi + \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)(\phi' + \delta\phi')^2\delta_{\mu\nu} + a^{-2}\Big((1 + 2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \nabla^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}) \\
&- (-1 + 2\Phi)(\bar{\phi}'' + \delta\phi'')\delta_{\mu\nu} - \mathcal{H}(\bar{\phi}' + \delta\phi')(-1 + 2\Phi)\delta_{\mu\nu} - (\bar{\phi}' + \delta\phi')(2\Psi' + \Phi')\delta_{\mu\nu}\Big) \\
&- \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Despreciando términos de orden superior

$$\Big(a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}$$
$$+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}\Big)\bar{\phi}+a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta\phi\delta_{\mu\nu}=8\pi\left(\bar{p}\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)\right)$$
$$+\frac{\omega a^{-2}}{2\bar{\phi}}\left(\left(1-2\Phi-\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)\bar{\phi}'^2+2\bar{\phi}'\delta\phi'\right)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\nabla^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}-(-1+2\Phi)\bar{\phi}''\delta_{\mu\nu}$$
$$+\delta\phi''\delta_{\mu\nu}-\mathcal{H}(-1+2\Phi)\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu}+\mathcal{H}\delta\phi'\delta_{\mu\nu}-(2\Psi'+\Phi')\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu}\Big)-\frac{1}{2}(\bar{V}+\bar{V}_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu}.$$

Dada la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.24), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}&\Big([2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\&+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}\Big)\bar{\phi}+(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta\phi\delta_{\mu\nu}=8\pi a^2\delta p\delta_{\mu\nu}\\&+8\pi a^2\bar{p}\left(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi\right)+\frac{\omega}{2\bar{\phi}}\left(-\left(2\Phi+\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)\bar{\phi}'^2+2\bar{\phi}'\delta\phi'\right)\delta_{\mu\nu}\\&+\Big(\partial_\mu\partial_\nu-\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta\phi-2\bar{\phi}''\Phi\delta_{\mu\nu}+\delta\phi''\delta_{\mu\nu}-2\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi\delta_{\mu\nu}+\mathcal{H}\delta\phi'\delta_{\mu\nu}\\&-(2\Psi'+\Phi')\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu}-\frac{a^2}{2}\bar{V}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{4.144}$$

Tomando la traza se llega a

$$(2\Psi''+\frac{2}{3}\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi)\bar{\phi}+(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta\phi=8\pi a^2\delta p$$
$$+\frac{\omega}{2\bar{\phi}}\left(-\left(2\Phi+\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}\right)\bar{\phi}'^2+2\bar{\phi}'\delta\phi'\right)+\Big(\frac{-2}{3}\nabla^2\delta\phi-2\bar{\phi}''\Phi+\delta\phi''-2\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi+\mathcal{H}\delta\phi'$$
$$-(2\Psi'+\Phi')\bar{\phi}'\Big)-\frac{a^2}{2}\bar{V}_\phi\delta\phi$$

Reemplazando la ecuación anterior en (4.144) se tiene

$$\left(\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi-\Phi)=\frac{8\pi a^2}{\bar{\phi}}\bar{p}\left(\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi+\frac{1}{\bar{\phi}}\Big(\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta\phi, \tag{4.145}$$

la parte fuera de la diagonal da

$$(\Psi-\Phi)=\frac{8\pi a^2}{\bar{\phi}}\bar{p}\Pi+\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}. \tag{4.146}$$

para el fluido perfecto se tiene que $\Pi=0$, llegando a la relación

$$\Psi=\Phi+\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}. \tag{4.147}$$

4.3.2 II-forma

Despejando ϕ de la ecuación (4.136)

$$\begin{aligned}
&-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] \\
&= -\frac{8\pi}{\phi}(\bar\rho + \delta\rho) + \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\phi^2}[(-1+2\Phi)(\phi')^2 - (1+2\Psi)(\partial\phi)^2] \\
&\quad + \frac{a^{-2}}{\phi}[3\mathcal{H}\phi' - 6\mathcal{H}\phi'\Phi - \nabla^2\phi(1+2\Psi) + \partial_\mu\phi\Psi,_\mu - 3\phi'\Psi'] - \frac{V(\phi)}{2\phi}. \qquad (4.148)
\end{aligned}$$

Reemplazando las relaciones (4.142) y la definición del potencial (4.139) en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
&-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] \\
&= -\frac{8\pi}{\bar\phi}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)(\bar\rho + \delta\rho) + \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\bar\phi^2}\left(1 - 2\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)[(-1+2\Phi)(\bar\phi'^2 + 2\bar\phi'\delta\phi')] \\
&\quad + \frac{a^{-2}}{\bar\phi}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)[3\mathcal{H}(\bar\phi' + \delta\phi') - 6\mathcal{H}(\bar\phi' + \delta\phi')\Phi - \nabla^2\delta\phi(1+2\Psi) \\
&\quad + \partial_\mu(\bar\phi + \delta\phi)\Psi,_\mu - 3(\bar\phi' + \delta\phi')\Psi'] - \frac{1}{2\bar\phi}\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)(\bar V + \bar V_\phi\delta\phi).
\end{aligned}$$

Despreciando términos de orden superior,

$$\begin{aligned}
&-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] = -\frac{8\pi}{\bar\phi}\left(\bar\rho + \delta\rho - \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\bar\rho\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\omega a^{-2}}{\bar\phi^2}[-\left(1 - 2\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\bar\phi'^2 - 2\bar\phi'\delta\phi' + 2\Phi\bar\phi'^2] \\
&+ \frac{a^{-2}}{\bar\phi}[3\mathcal{H}\bar\phi'\left(1 - \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right) + 3\mathcal{H}\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar\phi'\Phi - \nabla^2\delta\phi - 3\bar\phi'\Psi'] \\
&- \frac{1}{2\bar\phi}\left(\bar V + \bar V_\phi\delta\phi - \bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación del background de Friedmann tiempo-tiempo (3.23), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente tiempo-tiempo es

$$\boxed{\begin{aligned}
&[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] = -\frac{8\pi a^2}{\bar\phi}\left(\delta\rho - \frac{\bar\rho}{\bar\phi}\delta\phi\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\omega}{\bar\phi^2}\left[2\frac{\bar\phi'^2}{\bar\phi}\delta\phi - 2\bar\phi'\delta\phi' + 2\bar\phi'^2\Phi\right] \\
&+ \frac{1}{\bar\phi}\left[-3\mathcal{H}\frac{\bar\phi'}{\bar\phi}\delta\phi + 3\mathcal{H}\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar\phi'\Phi - \nabla^2\delta\phi - 3\bar\phi'\Psi'\right] \\
&- \frac{a^2}{2\bar\phi}\left(\bar V_\phi\delta\phi - \bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right).
\end{aligned}} \qquad (4.149)$$

Despejando ϕ de la ecuación (4.137)

$$\begin{aligned}
&a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}=\frac{8\pi}{\phi}(\bar{p}\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi))\\
&+\frac{\omega a^{-2}}{\phi^2}\Big((1+2\Psi)(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial\phi)^2)-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(-1+2\Phi)\phi'^2\Big)\\
&+\frac{a^{-2}}{\phi}\Big((1+2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu\phi-\nabla^2\phi\delta_{\mu\nu})-(-1+2\Phi)\phi''\delta_{\mu\nu}-\mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu}\\
&-\phi'(2\Psi'+\Phi')\delta_{\mu\nu}+\Psi_{,\nu}\partial_\mu\phi+\Psi_{,\mu}\partial_\nu\phi-\Phi_{,\lambda}\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu}\Big)-\frac{V}{2\phi}\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}\tag{4.150}$$

Usando las relaciones (4.142) para el campo escalar

$$\begin{aligned}
&a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}=\frac{8\pi}{\bar\phi}\left(1-\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)(\bar{p}\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi))\\
&-\frac{\omega a^{-2}}{2\bar\phi^2}\left(-1+2\Phi+2\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)(\phi'+\delta\phi')^2\delta_{\mu\nu}+\frac{a^{-2}}{\bar\phi}\left(1-\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\Big((1+2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi\\
&-\nabla^2\delta\phi\delta_{\mu\nu})-(-1+2\Phi)(\bar\phi''+\delta\phi'')\delta_{\mu\nu}-\mathcal{H}(\bar\phi'+\delta\phi')(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu}\\
&-(\bar\phi'+\delta\phi')(2\Psi'+\Phi')\delta_{\mu\nu}\Big)-\frac{1}{2\bar\phi}\left(\bar V+\bar V_\phi\delta\phi-\bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Despreciando términos de orden superior

$$\begin{aligned}
&a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}=\frac{8\pi}{\bar\phi}\left(\bar{p}\delta_{\mu\nu}-\bar{p}\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)\right)\\
&+\frac{\omega a^{-2}}{2\bar\phi^2}\left(\left(1-2\Phi-2\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\bar\phi'^2+2\bar\phi'\delta\phi'\right)\delta_{\mu\nu}+\frac{a^{-2}}{\bar\phi}\Big(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\nabla^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}+\bar\phi''\delta_{\mu\nu}\\
&+\left(\delta\phi''-2\Phi\bar\phi''-\bar\phi''\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}+\mathcal{H}\left(\bar\phi'+\delta\phi'-2\Phi\bar\phi'-\bar\phi'\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}-(2\Psi'+\Phi')\bar\phi'\delta_{\mu\nu}\Big)\\
&-\frac{1}{2\bar\phi}\left(\bar V+\bar V_\phi\delta\phi-\bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.24), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}
&[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}=\frac{8\pi a^2}{\bar\phi}\left(-\bar{p}\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)\right)\\
&-\frac{\omega}{\bar\phi^2}\Big(\left(\Phi+\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\bar\phi'^2-\bar\phi'\delta\phi'\Big)\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{\bar\phi}\Big(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi\\
&+\left(\delta\phi''-2\Phi\bar\phi''-\bar\phi''\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}+\mathcal{H}\left(\delta\phi'-2\Phi\bar\phi'-\bar\phi'\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}\\
&-(2\Psi'+\Phi')\bar\phi'\delta_{\mu\nu}\Big)-\frac{a^2}{2\bar\phi}\left(\bar V_\phi\delta\phi-\bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}}\tag{4.151}$$

AL tomar la traza se llega a

$$
\begin{aligned}
&2\Psi'' + \frac{2}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = \frac{8\pi a^2}{\bar\phi}\left(-\bar p\frac{\delta\phi}{\bar\phi} + \delta p\right) \\
&- \frac{\omega}{\bar\phi^2}\Big(\left(\Phi + \frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right)\bar\phi'^2 - \bar\phi'\delta\phi'\Big) + \frac{1}{\bar\phi}\Big(\frac{-2}{3}\nabla^2\delta\phi + \left(\delta\phi'' - 2\Phi\bar\phi'' - \bar\phi''\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right) \\
&+ \mathcal{H}\left(\delta\phi' - 2\Phi\bar\phi' - \bar\phi'\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right) - (2\Psi' + \Phi')\bar\phi'\Big) - \frac{a^2}{2\bar\phi}\left(\bar V_\phi\delta\phi - \bar V\frac{\delta\phi}{\bar\phi}\right).
\end{aligned}
$$

Reemplazando la ecuación anterior en (4.151) se tiene

$$
\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = \frac{8\pi a^2}{\bar\phi}\bar p\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi + \frac{1}{\bar\phi}\Big(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta\phi, \tag{4.152}
$$

la parte fuera de la diagonal da

$$
(\Psi - \Phi) = \frac{8\pi a^2}{\bar\phi}\bar p\Pi + \frac{\delta\phi}{\bar\phi}. \tag{4.153}
$$

para el fluido perfecto se tiene que $\Pi = 0$, llegando a la relación

$$
\Psi = \Phi + \frac{\delta\phi}{\bar\phi}. \tag{4.154}
$$

Sin importar cual forma se escoge para realizar las perturbaciones, la relación entre los potenciales y el tensor anisotrópico es igual.

4.3.3 Perturbación en la ecuación del campo escalar

Para hallar la ecuación de campo de BD perturbada para el campo escalar (2.80), primero se calcula la relación (4.134), usando la perturbación del campo escalar (4.138)

$$
\Box\phi = a^{-2}[-\delta\phi'' - 2\mathcal{H}\delta\phi' + \nabla^2\delta\phi - \bar\phi'' - 2\mathcal{H}\bar\phi' + 2\Phi\bar\phi'' + (\Phi' + 3\Psi')\bar\phi' + 4\mathcal{H}\Phi\bar\phi'], \tag{4.155}
$$

obteniendo así

$$
\begin{aligned}
&- \delta\phi'' - 2\mathcal{H}\delta\phi' + \nabla^2\delta\phi - \bar\phi'' - 2\mathcal{H}\bar\phi' + 2\Phi\bar\phi'' + (\Phi' + 3\Psi')\bar\phi' + 4\mathcal{H}\Phi\bar\phi' \\
&= \frac{a^2}{2\omega + 3}[8\pi(-\bar\rho + 3\bar p) + 8\pi(-\delta\rho + 3\delta p) + \bar\phi\bar V_\phi + \bar\phi\bar V_{\phi\phi}\delta\phi + \bar V_\phi\delta\phi - 2\bar V - 2\bar V_\phi\delta\phi],
\end{aligned}
$$

donde se usado el hecho de que la traza del tensor momentum-energía perturbado es

$$
T^{(m)} = -\bar\rho + 3\bar p - \delta\rho + 3\delta p. \tag{4.156}
$$

Teniendo en cuenta la ecuación background (3.28) se llega a

$$
\begin{aligned}
&\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi - (\Phi' + 3\Psi')\bar\phi' \\
&= \frac{a^2}{2\omega + 3}\left[8\pi[2\Phi(\bar\rho - 3\bar p) + \delta\rho - 3\delta p] - \bar\phi\bar V_{\phi\phi}\delta\phi + \bar V_\phi\delta\phi - 2\Phi\bar\phi\bar V_\phi + 4\Phi\bar V\right]
\end{aligned} \tag{4.157}
$$

4.4 Perturbaciones en teorías Escalar-Tensor en el gauge de Newton conforme

Para calcular las ecuaciones de campo perturbadas de Escalar-Tensor, se parte de la ecuación de campo hallada con anterioridad (2.120)

$$
\begin{aligned}
G^a{}_b f(\phi) = T^a{}_b + \omega(\phi)\left(g^{ca}\nabla_c\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}\delta^a{}_b\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) + \left(g^{ca}\nabla_c\nabla_b f(\phi) - \delta^a{}_b\Box f(\phi)\right)\\
- \delta^a{}_b V(\phi).
\end{aligned}
$$

La componente tiempo-tiempo es

$$
\begin{aligned}
G^0{}_0 f(\phi) &= T^0{}_0 + \omega(\phi)\left(g^{0c}\nabla_c\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}\delta^0{}_0\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) + \left(g^{c0}\nabla_c\partial_0 f(\phi) - \delta^0{}_0\Box f(\phi)\right)\\
&\quad - \delta^0{}_0 V(\phi)\\
&= T^0{}_0 + \omega(\phi)\left(g^{00}\phi'^2 - \frac{1}{2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) + \left(g^{c0}\nabla_c f'(\phi) - \Box f(\phi)\right) - V(\phi).
\end{aligned}
$$

Las siguientes relaciones se tendrán en cuenta a lo largo del cálculo (estas relaciones son las mismas que las encontradas en la sección anterior para BD, pero ahora para $f(\phi)$)

$$
g^{c0}\nabla_c f'(\phi) = a^{-2}[(-1+2\Phi)f'' + (\mathcal{H}+\Phi')f' - 2\Phi\mathcal{H}f' + \Phi,_\mu\partial_\mu f] \tag{4.158}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu f(\phi) = a^{-2}[&(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu f + \mathcal{H}f'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi' f'\delta_{\mu\nu}\\
&+ \Psi,_\nu\partial_\mu f + \Psi,_\mu\partial_\nu f - \Psi,_\lambda\partial_\lambda f\delta_{\mu\nu}]
\end{aligned} \tag{4.159}
$$

$$
\begin{aligned}
\Box f(\phi) = a^{-2}[&(-1+2\Phi)f'' + (1+2\Psi)\nabla^2 f + \partial_\mu f(\Phi,_\mu - \Psi,_\mu)\\
&+ 2\mathcal{H}f'(-1+2\Phi) + f'(3\Psi'+\Phi')],
\end{aligned} \tag{4.160}
$$

reemplazando la ecuación de la métrica perturbada (4.69), la relación (4.135) y las anteriores, se tiene

$$
\begin{aligned}
G^0{}_0 f(\phi) &= T^0{}_0 + \omega(\phi)a^{-2}\left((-1+2\Phi)\phi'^2 - \frac{1}{2}((-1+2\Phi)\phi'^2 + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2)\right)\\
&\quad + a^{-2}\big((-1+2\Phi)f'' + (\mathcal{H}+\Phi')f' - 2\Phi\mathcal{H}f' + \Phi,_\mu\partial_\mu f - (-1+2\Phi)f''\\
&\quad - (1+2\Psi)\nabla^2 f - \partial_\mu f(\Phi,_\mu - \Psi,_\mu) - 2\mathcal{H}f'(-1+2\Phi) - f'(3\Psi'+\Phi')\big) - V(\phi)\\
&= T^0{}_0 + \frac{1}{2}\omega(\phi)a^{-2}((-1+2\Phi)\phi'^2 - (1+2\Psi)(\partial\phi)^2) + a^{-2}(3\mathcal{H}f' - 6\mathcal{H}\Phi f'\\
&\quad - (1+2\Psi)\nabla^2 f + \Psi,_\mu\partial_\mu f - 3\Psi' f') - V(\phi).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la componente (0-0) del tensor de Einstein perturbado (4.85) y del tensor momentum-energía (4.119) se llega a

$$
\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi))f = -(\bar{\rho}+\delta\rho)\\
&+ \frac{1}{2}\omega a^{-2}((-1+2\Phi)\phi'^2 - (1+2\Psi)(\partial\phi)^2) + a^{-2}(3\mathcal{H}f' - 6\mathcal{H}\Phi f'\\
&- (1+2\Psi)\nabla^2 f + \Psi,_\mu\partial_\mu f - 3\Psi' f') - V.
\end{aligned} \tag{4.161}
$$

Ahora, la ecuación de campo para las componentes espacio-espacio es

$$
\begin{aligned}
G^{\mu}{}_{\nu} f(\phi) &= T^{\mu}{}_{\nu} + \omega(\phi)\left(g^{c\mu}\partial_c\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) + (g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu f(\phi) - \delta^{\mu}{}_{\nu}\Box f(\phi)) \\
&\quad - \delta^{\mu}{}_{\nu} V(\phi) \\
&= T^{\mu}{}_{\nu} + \omega(\phi)\left(g^{\kappa\mu}\partial_\kappa\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right) + (g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu f(\phi) - \delta^{\mu}{}_{\nu}\Box f(\phi)) \\
&\quad - \delta^{\mu}{}_{\nu} V(\phi).
\end{aligned}
$$

Se perturba la ecuación anterior teniendo en cuenta (4.69), las relaciones (4.135), (4.159) y (4.160)

$$
\begin{aligned}
G^{\mu}{}_{\nu} f &= T^{\mu}{}_{\nu} + \omega a^{-2}\left((1+2\Psi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}((-1+2\Phi)\phi'^2 + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2)\right) \\
&\quad + a^{-2}[(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu f + \mathcal{H}f'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi' f'\delta_{\mu\nu} + \Psi,_\nu\partial_\mu f + \Psi,_\mu\partial_\nu f \\
&\quad - \Psi,_\lambda\partial_\lambda f\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}((-1+2\Phi)f'' + (1+2\Psi)\nabla^2 f + \partial_\lambda f(\Phi,_\lambda - \Psi,_\lambda) \\
&\quad + 2\mathcal{H}f'(-1+2\Phi) + f'(3\Psi' + \Phi'))] - V\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Eliminando perturbaciones no lineales y teniendo en cuenta la componente del tensor de Einstein perturbado (4.88) y del momentum-energía (4.119) se encuentra

$$
\begin{aligned}
&[a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi-\Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ a^{-2}(\Psi-\Phi),_{\mu\nu}]f = \bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) \\
&+ \omega a^{-2}\left((1+2\Psi)\Big(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial\phi)^2\Big) - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(-1+2\Phi)\phi'^2\right) \\
&+ a^{-2}[(1+2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu f - \delta_{\mu\nu}\nabla^2 f) - \mathcal{H}f'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi,_\nu\partial_\mu f + \Psi,_\mu\partial_\nu f \\
&- (-1+2\Phi)f''\delta_{\mu\nu} - \partial_\lambda f\Phi,_\lambda\delta_{\mu\nu} - f'(2\Psi' + \Phi')\delta_{\mu\nu}] - V\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{4.162}
$$

En las ecuaciones encontradas (componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio para ST) no se ha tenido en cuenta la perturbación del campo escalar. Como se hizo para BD, hay 2 maneras de perturbar las ecuaciones de campo dependiendo de como se tome $f(\phi)$ en las ecuaciones.

4.4.1 I-forma

Usando las relaciones para el campo escalar perturbado (4.138 - 4.140) y (4.142) en la ecuación (4.161)

$$
\begin{aligned}
&(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi))(\bar{f} + \bar{f}_\phi\delta\phi) = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\omega} + \bar{\omega}_\phi\delta\phi)a^{-2}(-1+2\Phi)(\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\delta\phi') + a^{-2}(3\mathcal{H}(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi') \\
&- 6\mathcal{H}\Phi(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi') - (1+2\Psi)\nabla^2(\bar{f} + \bar{f}_\phi\delta\phi) \\
&+ \Psi,_\mu\partial_\mu(\bar{f} + f_\phi\delta\phi) - 3\Psi'(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi')) - (\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi).
\end{aligned}
$$

Despreciando términos de segundo orden

$$\begin{aligned}
&[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]\bar{f} - 3a^{-2}\mathcal{H}^2\bar{f}_\phi\delta\phi = -(\bar{\rho} + \delta\rho)\\
&+ \frac{1}{2}\bar{\omega}a^{-2}\big((-1+2\Phi)\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi'\big) - \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi a^{-2}\bar{\phi}'^2\delta\phi\\
&+ a^{-2}\Big(3\mathcal{H}\left(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi\right)\bar{\phi}' + 3\mathcal{H}\bar{f}_\phi\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Phi - \bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi - 3\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Psi'\Big)\\
&- (\bar{V} + V_\phi\delta\phi).
\end{aligned}$$

Dada la ecuación background de Friedmann tiempo-tiempo (3.31), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente tiempo-tiempo es

$$\boxed{\begin{aligned}
&[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\bar{f} - 3\mathcal{H}^2\bar{f}_\phi\delta\phi = -a^2\delta\rho + \bar{\omega}\big(\bar{\phi}'^2\Phi - \bar{\phi}'\delta\phi'\big)\\
&- \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi\bar{\phi}'^2\delta\phi + \Big(3\mathcal{H}\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi + 3\mathcal{H}\bar{f}_\phi\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Phi - \bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi - 3\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Psi'\Big)\\
&- a^2V_\phi\delta\phi.
\end{aligned}} \tag{4.163}$$

Para calcular las perturbaciones del campo escalar en la componente espacio-espacio, primero se calcula f'' usando la ecuaciones (4.140) y (4.141)

$$\begin{aligned}
f'' &= f_{\phi\phi}\phi'^2 + f_\phi\phi'' = (\bar{f}_{\phi\phi} + \bar{f}_\phi^{(3)}\delta\phi)(\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\delta\phi') + (\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}'' + \delta\phi'')\\
&= (\bar{f}_{\phi\phi} + \bar{f}_\phi^{(3)}\delta\phi)\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + (\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}'' + \bar{f}_\phi\delta\phi''.
\end{aligned} \tag{4.164}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (4.142) en la componente espacio-espacio (4.162) se encuentra

$$\begin{aligned}
&\Big(a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi\delta_{\mu\nu}\\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\Big)(\bar{f} + \bar{f}_\phi\delta\phi) = \bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)\\
&- \frac{1}{2}a^{-2}(\bar{\omega} + \bar{\omega}_\phi\delta\phi)(-1 + 2\Phi)(\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\delta\phi')\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[\bar{f}_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi)\\
&- \mathcal{H}((\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}' + \bar{f}_\phi\delta\phi')(-1 + 2\Phi)\delta_{\mu\nu} - (-1 + 2\Phi)((\bar{f}_{\phi\phi} + \bar{f}_\phi^{(3)}\delta\phi)\bar{\phi}'^2\\
&+ 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + (\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}'' + \bar{f}_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu} - ((\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}' + \bar{f}_\phi\delta\phi')\\
&(2\Psi' + \Phi')\delta_{\mu\nu}] - (\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

despreciando términos de orden superior

$$\begin{aligned}
&[a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f} + a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu} = \bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)\\
&- \frac{1}{2}\bar{\omega}a^{-2}\big((-1 + 2\Phi)\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi'\big)\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi a^{-2}\bar{\phi}'^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}\\
&+ a^{-2}[\bar{f}_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi) + \mathcal{H}((\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}' + \bar{f}_\phi\delta\phi')\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\bar{f}_\phi\Phi\delta_{\mu\nu}\\
&+ ((\bar{f}_{\phi\phi} + \bar{f}_\phi^{(3)}\delta\phi)\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + (\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)\bar{\phi}'' + \bar{f}_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu}\\
&- 2\Phi(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2 + \bar{f}_\phi\bar{\phi}'')\delta_{\mu\nu} - (2\Psi' + \Phi')\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu}] - (\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

En vista de la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.32), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\ &+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f} + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu} = a^2\delta p\delta_{\mu\nu} \\ &+ a^2\bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) - \bar{\omega}(\bar{\phi}'^2\Phi - \bar{\phi}'\delta\phi')\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi\bar{\phi}'^2\delta\phi\delta_{\mu\nu} \\ &+ \bar{f}_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi) + \mathcal{H}(\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi')\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\bar{f}_\phi\Phi\delta_{\mu\nu} \\ &+ (\bar{\phi}'^2\bar{f}^{(3)}_\phi\delta\phi + 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + \bar{\phi}''\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu} \\ &- 2\Phi(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2 + \bar{f}_\phi\bar{\phi}'')\delta_{\mu\nu} - (2\Psi' + \Phi')\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu} - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{4.165}$$

Al tomar la traza se tiene

$$\begin{aligned}&[2\Psi'' + \frac{2}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\bar{f} + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_\phi\delta\phi \\ &= a^2\delta p - \bar{\omega}(\bar{\phi}'^2\Phi - \bar{\phi}'\delta\phi') + \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi\bar{\phi}'^2\delta\phi - \frac{2}{3}\bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi + \mathcal{H}(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi') \\ &- 2\mathcal{H}\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Phi + \bar{\phi}'^2\bar{f}^{(3)}_\phi\delta\phi + 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + \bar{\phi}''\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi'' - 2\Phi(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2 + \bar{f}_\phi\bar{\phi}'') \\ &- (2\Psi' + \Phi')\bar{f}_\phi\bar{\phi}' - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi.\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación anterior en (4.165) queda

$$\bar{f}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi + \bar{f}_\phi\Big(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta\phi. \tag{4.166}$$

La parte fuera de la diagonal queda

$$\bar{f}(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\Pi + \bar{f}_\phi\delta\phi, \tag{4.167}$$

Para el fluido perfecto $\Pi = 0$, se tiene

$$\Psi = \Phi + \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi, \tag{4.168}$$

4.4.2 II-forma

Como se mencionó con anterioridad la 2 forma depende de como se despeje $f(\phi)$ de las ecuaciones de campo.
Despejando $f(\phi)$ de la ecuación (4.161)

$$\begin{aligned}&- 3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi) = \frac{1}{f}\Big[- (\rho + \delta\rho) \\ &+ \frac{1}{2}\omega a^{-2}((-1 + 2\Phi)\phi'^2 - (1 + 2\Psi)(\partial\phi)^2) + a^{-2}(3\mathcal{H}f' \\ &- 6\mathcal{H}\Phi f' - (1 + 2\Psi)\nabla^2 f + \Psi,_\mu\partial_\mu f - 3\Psi' f') - V\Big].\end{aligned}$$

Usando las relaciones para el campo escalar perturbado (4.138 - 4.140), (4.142) y

$$\frac{1}{f} = \bar{f}^{-1}\left(1 + \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right)^{-1} = \frac{1}{\bar{f}}\left(1 - \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right), \tag{4.169}$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
&-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi) = \frac{1}{\bar{f}}\left(1 - \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right)\Big[-(\bar{\rho}+\delta\rho) \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\omega} + \bar{\omega}_\phi\delta\phi)a^{-2}(-1+2\Phi)(\bar{\phi}'^2 + 2\bar{\phi}'\delta\phi') + a^{-2}(3\mathcal{H}(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi') \\
&- 6\mathcal{H}\Phi(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi') - (1+2\Psi)\nabla^2(\bar{f} + \bar{f}_\phi\delta\phi) \\
&+ \Psi_{,\mu}\,\partial_\mu(\bar{f} + f_\phi\delta\phi) - 3\Psi'(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi)(\bar{\phi}' + \delta\phi')) - (\bar{V} + \bar{V}_\phi\delta\phi)\Big].
\end{aligned}
$$

Despreciando términos de segundo orden

$$
\begin{aligned}
&[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]\bar{f} = -\left(\bar{\rho} + \delta\rho - \bar{\rho}\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\omega}a^{-2}\left(\left(-1 + 2\Phi + \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right)\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi'\right) - \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi a^{-2}\bar{\phi}'^2\delta\phi \\
&+ a^{-2}\Big(3\mathcal{H}\left(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi - \frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}\delta\phi\right)\bar{\phi}' + 3\mathcal{H}\bar{f}_\phi\delta\phi' - 6\mathcal{H}\Phi\bar{f}_\phi\bar{\phi}' - \bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi - 3\Psi'\bar{f}_\phi\bar{\phi}'\Big) \\
&- \left(\bar{V} + V_\phi\delta\phi - \bar{V}\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la ecuación de Friedmann del background tiempo-tiempo (3.31), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente tiempo-tiempo es

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\bar{f} = -a^2\left(\delta\rho - \bar{\rho}\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right) \\
&+ \bar{\omega}\left(\Phi\bar{\phi}'^2 + \frac{\bar{f}_\phi}{2\bar{f}}\bar{\phi}'^2\delta\phi - \bar{\phi}'\delta\phi'\right) - \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi\bar{\phi}'^2\delta\phi + 3\mathcal{H}\left(\bar{f}_{\phi\phi} - \frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}\right)\bar{\phi}'\delta\phi \\
&+ 3\mathcal{H}\bar{f}_\phi\delta\phi' - 6\mathcal{H}\Phi\bar{f}_\phi\bar{\phi}' - \bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi - 3\Psi'\bar{f}_\phi\bar{\phi}' - a^2\left(\bar{V}_\phi\delta\phi - \bar{V}\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right).
\end{aligned}
}
\tag{4.170}
$$

Despejando $f(\phi)$ de las ecuación (4.162)

$$
\begin{aligned}
&[a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}] = \frac{1}{f}\Big((\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) \\
&+ \omega a^{-2}\left((1+2\Psi)\Big(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial\phi)^2\Big) - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(-1+2\Phi)\phi'^2\right) \\
&+ a^{-2}[(1+2\Psi)(\partial_\mu\partial_\nu f - \delta_{\mu\nu}\nabla^2 f) - \mathcal{H}f'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi_{,\nu}\,\partial_\mu f + \Psi_{,\mu}\,\partial_\nu f \\
&- (-1+2\Phi)f''\delta_{\mu\nu} - \partial_\lambda f\Phi_{,\lambda}\,\delta_{\mu\nu} - f'(2\Psi' + \Phi')\delta_{\mu\nu}] - V\delta_{\mu\nu}\Big).
\end{aligned}
\tag{4.171}
$$

Ahora, teniendo en cuenta las relaciones (4.142) y (4.164) se encuentra

$$a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi\delta_{\mu\nu}$$
$$+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]=\frac{1}{\bar f}\left(1-\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\delta\phi\right)\Big((\bar p\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar p(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi))$$
$$-\frac{1}{2}(\bar\omega+\bar\omega_\phi\delta\phi)a^{-2}\delta_{\mu\nu}(-1+2\Phi)(\bar\phi'^2+2\bar\phi'\delta\phi')+a^{-2}[\bar f_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi)$$
$$-\mathcal{H}((\bar f_\phi+\bar f_{\phi\phi}\delta\phi)\bar\phi'+\bar f_\phi\delta\phi')(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu}-(-1+2\Phi)((\bar f_{\phi\phi}+\bar f_\phi^{(3)}\delta\phi)\bar\phi'^2$$
$$+2\bar\phi'\bar f_{\phi\phi}\delta\phi'+(\bar f_\phi+\bar f_{\phi\phi}\delta\phi)\bar\phi''+\bar f_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu}-((\bar f_\phi+\bar f_{\phi\phi}\delta\phi)\bar\phi'+\bar f_\phi\delta\phi')$$
$$(2\Psi'+\Phi')\delta_{\mu\nu}]-(\bar V+\bar V_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu}\Big).$$

Despreciando términos de orden superior

$$[a^{-2}(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu}+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}$$
$$+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]\bar f=\bar p\delta_{\mu\nu}+\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar p(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)-\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\bar p\delta\phi\delta_{\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{2}\bar\omega a^{-2}(-\bar\phi'^2+2\Phi\bar\phi'^2-2\bar\phi'\delta\phi'+\bar\phi'^2\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\delta\phi)\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\bar\omega_\phi a^{-2}\bar\phi'^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}$$
$$+a^{-2}[\bar f_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi)+\mathcal{H}((\bar f_\phi+\bar f_{\phi\phi}\delta\phi)\bar\phi'+\bar f_\phi\delta\phi')\delta_{\mu\nu}-2\mathcal{H}\Phi\bar f_\phi\bar\phi'\delta_{\mu\nu}$$
$$+((\bar f_{\phi\phi}+\bar f_\phi^{(3)}\delta\phi)\bar\phi'^2+2\bar\phi'\bar f_{\phi\phi}\delta\phi'+(\bar f_\phi+\bar f_{\phi\phi}\delta\phi)\bar\phi''+\bar f_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu}$$
$$-2\Phi(\bar f_{\phi\phi}\bar\phi'^2+\bar f_\phi\bar\phi'')\delta_{\mu\nu}-(2\Psi'+\Phi')\bar f_\phi\bar\phi'\delta_{\mu\nu}-\mathcal{H}\frac{\bar f_\phi^2\bar\phi'}{\bar f}\delta\phi\delta_{\mu\nu}-\frac{\bar f_{\phi\phi}\bar f_\phi}{\bar f}\bar\phi'^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}$$
$$-\frac{\bar f_\phi^2}{\bar f}\bar\phi''\delta\phi\delta_{\mu\nu}]-(\bar V+\bar V_\phi\delta\phi)\delta_{\mu\nu}+\bar V\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\delta\phi\delta_{\mu\nu}.$$

En vista de la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.32), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}&[(2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi)\delta_{\mu\nu}+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]\bar f\\&=a^2\delta p\delta_{\mu\nu}+a^2\bar p(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)-a^2\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\bar p\delta\phi\delta_{\mu\nu}-\bar\omega(\Phi\bar\phi'^2-\bar\phi'\delta\phi')\delta_{\mu\nu}\\&+\frac{1}{2}(\bar\omega_\phi\bar\phi'^2-\bar\omega\bar\phi'^2\frac{\bar f_\phi}{\bar f})\delta\phi\delta_{\mu\nu}+\bar f_\phi(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi-\delta_{\mu\nu}\nabla^2\delta\phi)-2\mathcal{H}\Phi\bar f_\phi\bar\phi'\delta_{\mu\nu}\\&+\mathcal{H}(\bar f_{\phi\phi}\bar\phi'\delta\phi+\bar f_\phi\delta\phi')\delta_{\mu\nu}\\&+(\bar f_\phi^{(3)}\bar\phi'^2\delta\phi+2\bar\phi'\bar f_{\phi\phi}\delta\phi'+\bar f_{\phi\phi}\bar\phi''\delta\phi+\bar f_\phi\delta\phi'')\delta_{\mu\nu}\\&-2\Phi(\bar f_{\phi\phi}\bar\phi'^2+\bar f_\phi\bar\phi'')\delta_{\mu\nu}-(2\Psi'+\Phi')\bar f_\phi\bar\phi'\delta_{\mu\nu}-\mathcal{H}\frac{\bar f_\phi^2\bar\phi'}{\bar f}\delta\phi\delta_{\mu\nu}\\&-\frac{\bar f_{\phi\phi}\bar f_\phi}{\bar f}\bar\phi'^2\delta\phi\delta_{\mu\nu}-\frac{\bar f_\phi^2}{\bar f}\bar\phi''\delta\phi\delta_{\mu\nu}-a^2\bar V_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu}+a^2\bar V\frac{\bar f_\phi}{\bar f}\delta\phi\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{4.172}$$

Al tomar la traza se tiene

$$
\begin{aligned}
&[2\Psi'' + \frac{2}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\bar{f} \\
&= a^2\delta p - a^2\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\bar{p}\delta\phi - \bar{\omega}(\Phi\bar{\phi}'^2 - \bar{\phi}'\delta\phi') + \frac{1}{2}(\bar{\omega}_\phi\bar{\phi}'^2 - \bar{\omega}\bar{\phi}'^2\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}})\delta\phi \\
&- \frac{2}{3}\bar{f}_\phi\nabla^2\delta\phi - 2\mathcal{H}\Phi\bar{f}_\phi\bar{\phi}' + \mathcal{H}(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi') \\
&+ \bar{f}_\phi^{(3)}\bar{\phi}'^2\delta\phi + 2\bar{\phi}'\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi' + \bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}''\delta\phi + \bar{f}_\phi\delta\phi'' - 2\Phi(\bar{f}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2 + \bar{f}_\phi\bar{\phi}'') \\
&- (2\Psi' + \Phi')\bar{f}_\phi\bar{\phi}' - \mathcal{H}\frac{\bar{f}_\phi^2\bar{\phi}'}{\bar{f}}\delta\phi - \frac{\bar{f}_{\phi\phi}\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\bar{\phi}'^2\delta\phi - \frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}\bar{\phi}''\delta\phi - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi + a^2\bar{V}\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi.
\end{aligned}
$$

Reemplazando la ecuación anterior en (4.172) queda

$$
\bar{f}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi + \bar{f}_\phi\Big(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta\phi. \tag{4.173}
$$

La parte fuera de la diagonal queda

$$
\bar{f}(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\Pi + \bar{f}_\phi\delta\phi, \tag{4.174}
$$

Para el fluido perfecto $\Pi = 0$, se tiene

$$
\Psi = \Phi + \frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi, \tag{4.175}
$$

De las 2 formas que se hicieron para encontrar las perturbaciones, las relaciones entre los potenciales fue la misma.

4.4.3 Perturbación en la ecuación del campo escalar

La ecuación de campo en Escalar-Tensor (2.128) es

$$
\omega(\phi)\Box\phi + \frac{1}{2}Rf_\phi + \frac{1}{2}\omega_\phi\nabla^c\phi\nabla_c\phi - V_\phi = 0,
$$

la relación (4.135) con la perturbación (4.138) a primer orden queda

$$
\nabla^c\phi\nabla_c\phi = a^{-2}[-\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\bar{\phi}'^2\Phi]. \tag{4.176}
$$

Teniendo en cuenta esta ecuación y las relaciones (4.139, 4.140,4.155) se tiene

$$
\begin{aligned}
&a^{-2}(\bar{\omega} + \bar{\omega}_\phi\delta\phi)[-\delta\phi'' - 2\mathcal{H}\delta\phi' + \nabla^2\delta\phi - \bar{\phi}'' - 2\mathcal{H}\bar{\phi}' + 2\Phi\bar{\phi}'' + (\Phi' + 3\Psi')\bar{\phi}' + 4\mathcal{H}\Phi\bar{\phi}'] \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{R} + \delta R)(\bar{f}_\phi + \bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi) + \frac{1}{2}a^{-2}(\bar{\omega}_\phi + \bar{\omega}_{\phi\phi}\delta\phi)[-\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\bar{\phi}'^2\Phi] \\
&- \bar{V}_\phi - \bar{V}_{\phi\phi}\delta\phi = 0.
\end{aligned}
$$

Despreciando términos de orden superior queda

$$
\begin{aligned}
&\bar{\omega}[-\delta\phi'' - 2\mathcal{H}\delta\phi' + \nabla^2\delta\phi - \bar{\phi}'' - 2\mathcal{H}\bar{\phi}' + 2\Phi\bar{\phi}'' + (\Phi' + 3\Psi')\bar{\phi}' + 4\mathcal{H}\Phi\bar{\phi}'] \\
&- \bar{\omega}_\phi(\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}')\delta\phi + \frac{1}{2}a^2(\bar{R}\bar{f}_\phi + \bar{f}_\phi\delta R + \bar{R}\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi(-\bar{\phi}'^2 - 2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\bar{\phi}'^2\Phi) - \frac{1}{2}\bar{\omega}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2\delta\phi' - a^2(\bar{V}_\phi + \bar{V}_{\phi\phi}\delta\phi) = 0.
\end{aligned} \tag{4.177}
$$

Si se tiene en cuenta la ecuación del background (3.35), la ecuación de perturbación del campo escalar queda

$$\bar{\omega}[-\delta\phi'' - 2\mathcal{H}\delta\phi' + \nabla^2\delta\phi + 2\Phi\bar{\phi}'' + (\Phi' + 3\Psi')\bar{\phi}' + 4\mathcal{H}\Phi\bar{\phi}'] - \bar{\omega}_\phi(\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}')\delta\phi + \frac{1}{2}a^2\bar{f}_\phi\delta R + 3(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\bar{f}_{\phi\phi}\delta\phi + \frac{1}{2}\bar{\omega}_\phi(-2\bar{\phi}'\delta\phi' + 2\bar{\phi}^2\Phi) - \frac{1}{2}\bar{\omega}_{\phi\phi}\bar{\phi}'^2\delta\phi' - a^2\bar{V}_{\phi\phi}\delta\phi = 0. \tag{4.178}$$

Se mostró el procedimiento para calcular las perturbaciones en ST. Sin embargo, en el apéndice I se muestra un método para hallar las perturbaciones usando el software **Mathematica** con el paquete *Xpand* [63].

4.5 Perturbaciones en teorías f(R) en el gauge de Newton conforme

La ecuación de campo de $f(R)$ en componentes mixtas es

$$G^a{}_b f_R = T^a{}_b + \frac{1}{2}\delta^a{}_b(f - f_R R) + \nabla^a\nabla_b f_R - \delta^a{}_b\Box f_R. \tag{4.179}$$

Las siguientes relaciones se usarán a lo largo del desarrollo de las ecuaciones perturbadas para $f(R)$ (ver apéndice G)

$$\nabla^0\nabla_0 f_R = a^{-2}((-1+2\Phi)f_R'' + (\mathcal{H} + \Phi')f_R' - 2\mathcal{H}\Phi f_R' + \Phi_{,\lambda}\,\partial_\lambda f_R) \tag{4.180}$$

$$\nabla^\mu\nabla_\nu f_R = a^{-2}((1+2\Psi)\partial^\mu\partial_\nu f_R - (1+2\Psi)\mathcal{H}\delta^\mu{}_\nu f_R' + (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi) + \Psi')\delta^\mu{}_\nu f_R' + \Psi_{,\nu}\,\partial_\mu f_R + \Psi_{,\mu}\,\partial_\nu f_R - \Psi_{,\lambda}\,\partial_\lambda f_R\delta^\mu{}_\nu) \tag{4.181}$$

$$\Box f(R) = a^{-2}((-1+2\Phi)f_R'' + 2\mathcal{H}f_R'(-1+2\Phi) + (\Phi' + 3\Psi')f_R' + (1+2\Psi)\nabla^2 f_R + (\Phi_{,\mu} - \Psi_{,\mu})\partial_\mu f_R). \tag{4.182}$$

La ecuación de campo para las componentes tiempo-tiempo es

$$G^0{}_0 f_R = T^0_0 + \frac{1}{2}(f - f_R R) + \nabla^0\nabla_0 f_R - \Box f_R, \tag{4.183}$$

reemplazando las relaciones anteriores se llega a

$$G^0{}_0 f_R = T^0_0 + \frac{1}{2}(f - f_R R) - a^{-2}((1+2\Psi)\nabla^2 f_R + 3\mathcal{H}(-1+2\Phi)f_R' + 3\Psi' f_R' - \Psi_{,\mu}\,\partial_\mu f_R). \tag{4.184}$$

De la componente tiempo-tiempo del tensor de Einstein perturbada (4.85) y la del momentum-energía (4.119) se tiene

$$[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]f_R = -(\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(f - f_R R) - a^{-2}((1+2\Psi)\nabla^2 f_R + 3\mathcal{H}(-1+2\Phi)f_R' + 3\Psi' f_R' - \Psi_{,\mu}\,\partial_\mu f_R). \tag{4.185}$$

La ecuación para la componente espacio-espacio es

$$G^\mu{}_\nu f_R = T^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu(f - f_R R) + \nabla^\mu\nabla_\nu f_R - \delta^\mu{}_\nu\Box f_R, \tag{4.186}$$

teniendo en cuenta las relaciones (4.181) y (4.182) se llega a

$$\begin{aligned}
G^\mu{}_\nu f_R = {} & T^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu(f - f_R R) + a^{-2}((1+2\Psi)\partial^\mu\partial_\nu f_R + (-1+2\Phi)\mathcal{H} f'_R\delta^\mu{}_\nu + \Psi' f'_R\delta^\mu{}_\nu \\
& + \Psi,_\nu\partial_\mu f_R + \Psi,_\mu\partial_\nu f_R - \Psi,_\lambda\partial_\lambda f_R\delta^\mu{}_\nu - (-1+2\Phi)f''_R\delta^\mu{}_\nu - 2\mathcal{H} f'_R(-1+2\Phi)\delta^\mu{}_\nu \\
& - (\Phi' + 3\Psi')f'_R\delta^\mu{}_\nu - (1+2\Psi)\nabla^2 f_R\delta^\mu{}_\nu - (\Phi,_\lambda - \Psi,_\lambda)\partial_\lambda f_R\delta^\mu{}_\nu \\
= {} & T^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu(f - f_R R) + a^{-2}((1+2\Psi)(\partial^\mu\partial_\nu - \nabla^2)f_R - (-1+2\Phi)\mathcal{H} f'_R\delta^\mu{}_\nu \\
& + \Psi,_\nu\partial_\mu f_R + \Psi,_\mu\partial_\nu f_R - (-1+2\Phi)f''_R\delta^\mu{}_\nu - (\Phi' + 2\Psi')f'_R\delta^\mu{}_\nu - \Phi,_\lambda\partial_\lambda f_R\delta^\mu{}_\nu).
\end{aligned}$$

De la componente espacio-espacio del tensor de Einstein perturbada (4.88) y la del momentum-energía (4.119) se tiene

$$\begin{aligned}
& [a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
& + a^{-2}(\Psi - \Phi),_{\mu\nu}]f_R = \bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu(f - f_R R) \\
& + a^{-2}((1+2\Psi)(\partial^\mu\partial_\nu - \nabla^2)f_R - (-1+2\Phi)\mathcal{H} f'_R\delta^\mu{}_\nu + \Psi,_\nu\partial_\mu f_R + \Psi,_\mu\partial_\nu f_R \\
& - (-1+2\Phi)f''_R\delta^\mu{}_\nu - (\Phi' + 2\Psi')f'_R\delta^\mu{}_\nu - \Phi,_\lambda\partial_\lambda f_R\delta^\mu{}_\nu).
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Teniendo en cuenta

$$f = \bar{f} + \bar{f}_R\delta R \quad , \quad f_R = \bar{f}_R + \bar{f}_{RR}\delta R \quad \text{y} \quad f_{RR} = \bar{f}_{RR} + \bar{f}^{(3)}_R\delta R, \tag{4.188}$$

se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f_R} &= (\bar{f}_R + \bar{f}_{RR}\delta R)^{-1} = \frac{1}{\bar{f}_R}\left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right) \\
\partial_\mu f_R &= \bar{f}_{RR}\partial_\mu\delta R \\
\nabla^2 f_R &= \bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R,
\end{aligned} \tag{4.189}$$

donde se ha usado el hecho de que $\bar{R} = \bar{R}(\eta)$.
Como para las teorías de BD y ST, se pueden perturbar las ecuaciones para $f(R)$ de dos maneras, dependiendo de donde se encuentre el factor f_R.

4.5.1 I-forma

Reemplazando las relaciones (4.189) en la ecuación (4.185)

$$\begin{aligned}
& [-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)](\bar{f}_R + \bar{f}_{RR}\delta R) \\
& = -(\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} + \bar{f}_R\delta R - (\bar{f}_R + \bar{f}_{RR}\delta R)(\bar{R} + \delta R)) \\
& \quad - a^{-2}\big((1+2\Psi)\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R + 3\mathcal{H}(-1+2\Phi)(\bar{f}_{RR} + \bar{f}^{(3)}_R\delta R)(\bar{R}' + \delta R') \\
& \quad + 3\Psi'(\bar{f}_{RR} + \bar{f}^{(3)}_R\delta R)(\bar{R}' + \delta R') - \bar{f}_{RR}\Psi,_\mu\partial_\mu\delta R\big) \\
& = -(\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - a^{-2}\big(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R \\
& \quad + 3\mathcal{H}(-1+2\Phi)(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}^{(3)}_R\delta R) + 3\Psi'(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}^{(3)}_R\delta R)\big) \\
& = -(\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - a^{-2}\big(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R \\
& \quad - 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}^{(3)}_R\delta R) + 6\mathcal{H}\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Phi + 3\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi'\big),
\end{aligned}$$

donde se han depreciado términos de orden superior, además, distribuyendo el paréntesis en el término de la izquierda se obtiene

$$
\begin{aligned}
&[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]\bar{f}_R - 3a^{-2}\mathcal{H}^2\bar{f}_{RR}\delta R = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - a^{-2}\big(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R - 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) \\
&+ 6\mathcal{H}\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Phi + 3\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi'\big).
\end{aligned}
$$

Dada la ecuación del background de Friedmann (0-0) (3.36), la ecuación de perturbación para la componente tiempo-tiempo es

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\bar{f}_R - 3\mathcal{H}^2\bar{f}_{RR}\delta R = -a^2\delta\rho - \frac{a^2\bar{R}}{2}\bar{f}_{RR}\delta R \\
&- \bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R + 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) - 6\mathcal{H}\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Phi - 3\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi'.
\end{aligned}
}
\tag{4.190}
$$

Reemplazando las relaciones (4.189) para la componente espacio-espacio (4.187), se tiene

$$
\begin{aligned}
&[a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f}_R + a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_{RR}\delta R\delta_{\mu\nu} = \bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) \\
&+ \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) + a^{-2}((1 + 2\Psi)\bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta^\mu{}_\nu\nabla^2)\delta R - (-1 + 2\Phi)\mathcal{H} \\
&(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu - (-1 + 2\Phi)(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R \\
&+ \bar{R}''\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu - (\Phi' + 2\Psi')(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu),
\end{aligned}
$$

donde se han utilizado las relaciones (4.188), (4.189) y el hecho de que

$$
\begin{aligned}
f_R'' &= \frac{d}{d\eta}(f_{RR}R') = f_R^{(3)}R'^2 + f_{RR}R'' \\
&= (\bar{f}_R^{(3)} + \bar{f}_R^{(4)}\delta R)(\bar{R}'^2 + 2\bar{R}'\delta R') + (\bar{f}_{RR} + \bar{f}_R^{(3)}\delta R)(\bar{R}'' + \delta R'') \\
&= \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{R}''\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R.
\end{aligned}
\tag{4.191}
$$

Despreciando términos de segundo orden se encuentra que

$$
\begin{aligned}
&[(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + [2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f}_R + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_{RR}\delta R\delta_{\mu\nu} = a^2(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) \\
&+ \frac{a^2}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R)\delta_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R + \mathcal{H}(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' \\
&+ \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{R}'\bar{f}_{RR}\Phi\delta_{\mu\nu} + (\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{R}''\bar{f}_{RR} \\
&+ \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.40), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\ &+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f}_R + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_{RR}\delta R\delta_{\mu\nu} = a^2\delta p\delta_{\mu\nu}\\ &+ a^2\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) - \frac{a^2\bar{R}}{2}\bar{f}_{RR}\delta R\delta_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R\\ &+ \mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{R}'\bar{f}_{RR}\Phi\delta_{\mu\nu}\\ &+ (2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu}\\ &- 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{4.192}$$

Al tomar la traza se tiene

$$\begin{aligned}&[2\Psi'' + \frac{2}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\bar{f}_R + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{f}_{RR}\delta R\\ &= a^2\delta p - \frac{a^2}{2}\bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R - \frac{2}{3}\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R + \mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) - 2\mathcal{H}\bar{R}'\bar{f}_{RR}\Phi\\ &+ 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R - 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\\ &- (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\end{aligned}$$

reemplazando la ecuación anterior en (4.192) queda

$$\bar{f}_R\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi + \bar{f}_{RR}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\delta R \tag{4.193}$$

la parte fuera de la diagonal queda

$$\bar{f}_R(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\Pi + \bar{f}_{RR}\delta R. \tag{4.194}$$

Para el fluido perfecto $\Pi = 0$, se obtiene la relación

$$\Psi = \Phi + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R. \tag{4.195}$$

4.5.2 II-forma

Despejando el factor $f(R)$ de la ecuación (4.185), y reemplazando las relaciones (4.189) se tiene

$$
\begin{aligned}
&[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]\bar{f}_R \\
&= \left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right)\Bigg(- (\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} + \bar{f}_R\delta R - (\bar{f}_R + \bar{f}_{RR}\delta R)(\bar{R} + \delta R)) \\
&\quad - a^{-2}\big((1 + 2\Psi)\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R + 3\mathcal{H}(-1 + 2\Phi)(\bar{f}_{RR} + \bar{f}_R^{(3)}\delta R)(\bar{R}' + \delta R') \\
&\quad + 3\Psi'(\bar{f}_{RR} + \bar{f}_R^{(3)}\delta R)(\bar{R}' + \delta R') - \bar{f}_{RR}\Psi,_{\mu}\partial_{\mu}\delta R\big)\Bigg) \\
&= \left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right)\Bigg(- (\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - a^{-2}\big(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R \\
&\quad + 3\mathcal{H}(-1 + 2\Phi)(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) + 3\Psi'(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\big)\Bigg) \\
&= \left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right)\Bigg(- (\bar{\rho} + \delta\rho) + \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - a^{-2}\big(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R \\
&\quad - 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) + 6\mathcal{H}\Phi\bar{f}_{RR}\bar{R}' + 3\Psi'\bar{f}_{RR}\bar{R}'\big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

donde se han depreciado términos de orden superior, además, distribuyendo el primer paréntesis después de la igualdad se obtiene

$$
\begin{aligned}
&[-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)]\bar{f}_R = -\bar{\rho}\left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right) - \delta\rho \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) - \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R})\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R - a^{-2}\Bigg(\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R \\
&- 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\bar{R}' + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) + 3\mathcal{H}\frac{(\bar{f}_{RR})^2}{\bar{f}_R}\bar{R}'\delta R + 6\mathcal{H}\Phi\bar{f}_{RR}\bar{R}' \\
&+ 3\Psi'\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Bigg).
\end{aligned}
$$

Dada la ecuación background de Friedmann para la componente tiempo-tiempo (3.39), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente tiempo-tiempo es

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\bar{f}_R = a^2\left(\bar{\rho}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R - \delta\rho\right) - \frac{a^2}{2}\bar{f}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R \\
&- \bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R + 3\mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) - 3\mathcal{H}\frac{(\bar{f}_{RR})^2}{\bar{f}_R}\bar{R}'\delta R - 6\mathcal{H}\Phi\bar{f}_{RR}\bar{R}' \\
&- 3\Psi'\bar{f}_{RR}\bar{R}'.
\end{aligned}
}
\tag{4.196}
$$

Para la componente espacio-espacio (4.187) se tiene

$$[a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}$$
$$+ a^{-2}(\Psi - \Phi),_{\mu\nu}]\bar{f}_R = \left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right)(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R) + a^{-2}((1+2\Psi)\bar{f}_{RR}(\partial^\mu\partial_\nu - \delta^\mu{}_\nu\nabla^2)\delta R - (-1+2\Phi)\mathcal{H}$$
$$(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu - (-1+2\Phi)(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R$$
$$+ \bar{R}''\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu - (\Phi' + 2\Psi')(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta^\mu{}_\nu)),$$

donde se han utilizado las relaciones (4.188), (4.189) y (4.191) Despreciando términos de segundo orden se encuentra que

$$[(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + [2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}$$
$$+ (\Psi - \Phi),_{\mu\nu}]\bar{f}_R = \left(1 - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\right)(a^2(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi))$$
$$+ \frac{a^2}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R)\delta_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R + \mathcal{H}(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R'$$
$$+ \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\Phi\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu} + (\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{R}''\bar{f}_{RR}$$
$$+ \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}),$$

distribuyendo el primer paréntesis se obtiene

$$[(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_{\mu\nu} + [2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}$$
$$+ (\Psi - \Phi),_{\mu\nu}]\bar{f}_R = a^2(\bar{p}\delta_{\mu\nu} + \delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi,_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) - a^2\bar{p}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\delta_{\mu\nu}$$
$$+ \frac{a^2}{2}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} - \bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R)\delta_{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R})\delta R\delta_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R$$
$$+ \mathcal{H}(\bar{R}'\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu} - \mathcal{H}\bar{R}'\frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\delta R\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\Phi\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}$$
$$+ (\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{R}''\bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu}$$
$$- \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta R\delta_{\mu\nu} - 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación background de Friedmann espacio-espacio (3.37), la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio es

$$\boxed{\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\ &+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{f}_R = a^2(\delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) - a^2\bar{p}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\delta_{\mu\nu}\\ &- \frac{a^2}{2}\bar{f}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R\delta_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R + \mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu}\\ &- \mathcal{H}\bar{R}'\frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\delta R\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\Phi\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}\\ &+ (2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R)\delta_{\mu\nu}\\ &- \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta R\delta_{\mu\nu} - 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta_{\mu\nu}\\ &- (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR}\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{4.197}$$

Al tomar la traza se tiene

$$\begin{aligned}&[2\Psi'' + \frac{2}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\bar{f}_R\\ &= a^2\delta p - \bar{p}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R - \frac{a^2}{2}\bar{R}\bar{f}_{RR}\delta R - \frac{a^2}{2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}(\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R})\delta R - \frac{2}{3}\bar{f}_{RR}\nabla^2\delta R\\ &+ \mathcal{H}(\bar{f}_{RR}\delta R' + \bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R) - \mathcal{H}\bar{R}'\frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\delta R - 2\mathcal{H}\Phi\bar{R}'\bar{f}_{RR}\\ &+ 2\bar{R}'\bar{f}_R^{(3)}\delta R' + \bar{R}'^2\bar{f}_R^{(4)}\delta R + \bar{f}_{RR}\delta R'' + \bar{R}''\bar{f}_R^{(3)}\delta R - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR})\delta R\\ &- 2\Phi(\bar{R}'^2\bar{f}_R^{(3)} + \bar{R}''\bar{f}_{RR}) - (\Phi' + 2\Psi')\bar{R}'\bar{f}_{RR},\end{aligned}$$

reemplazando la ecuación anterior en (4.197) queda

$$\bar{f}_R\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\right)\Pi + \bar{f}_{RR}\Big(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Big)\delta R \tag{4.198}$$

la parte fuera de la diagonal queda

$$\bar{f}_R(\Psi - \Phi) = a^2\bar{p}\Pi + \bar{f}_{RR}\delta R. \tag{4.199}$$

Para el fluido perfecto $\Pi = 0$, se obtiene la relación

$$\Psi = \Phi + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R. \tag{4.200}$$

Como en las relaciones de los potenciales para BD y ST, la relación en los potenciales para $f(R)$ en las dos formas es la misma.

Las perturbaciones encontradas para RG, BD, ST y $f(R)$ fueron encontradas de forma general. El siguiente capítulo se centrará en restringir las perturbaciones en el dominio de materia, las cuales dan explicación a la formación de estructuras.

Capítulo 5

Perturbaciones cosmológicas en el dominio de materia en el gauge de Newton conforme

En el presente capítulo se encuentran las perturbaciones en el dominio de materia para RG, BD, ST y $f(R)$. Las ecuaciones que gobiernan la evolución de las densidades perturbadas, son las que describen la formación de estructuras [45, 10].

5.1 Aproximación sub-horizonte en las ecuaciones de continuidad de momentum-energía

Las ecuaciones de conservación de energía (4.130) y de momentum perturbado (4.131) en el dominio de materia[1], i.e., $p = 0$, $w = 0$, $\Pi = 0$, quedan

$$\delta_m' = \nabla^2 v + 3\Psi' \tag{5.1}$$

y

$$v' = -\mathcal{H}v + \Phi, \tag{5.2}$$

donde δ_m es la densidad relativa, v es la velocidad peculiar, Φ y Ψ son los potenciales de Bardeen y $\mathcal{H}$ es el parámetro de Hubble.
La ecuación de conservación de energía escrita en el espacio de Fourier queda [41]

$$\delta_m' = -k^2 v + 3\Psi', \tag{5.3}$$

donde k es el número de onda.
Las ecuaciones de conservación anteriores contienen el término v. Lo que se pretende hacer es eliminar este término, para lo cual se deriva la primera ecuación respecto a η y se reemplaza en la segunda ecuación, obteniendo

$$\delta_m'' = k^2\mathcal{H}v - k^2\Phi + 3\Psi'',$$

reemplazando la ecuación (5.3), se tiene

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' + k^2\Phi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\Psi'' = 0. \tag{5.4}$$

La aproximación sub-horizonte contiene dos aproximaciones: una, la aproximación a escala pequeña $\mathcal{H} \ll k$ y la segunda, la aproximación cuasi-estática $\frac{\partial}{\partial\eta} \sim \mathcal{H}$ [41].

[1]Materia se refiere a materia no relativista, tal que la presión es muy pequeña comparada con la densidad de energía, por lo cual se puede ignorar.

Aplicando la aproximación sub-horizonte, la ecuación anterior queda

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' + k^2\Phi = 0. \tag{5.5}$$

5.1.1 Aproximación sub-horizonte en Relatividad General

La componente tiempo-tiempo perturbada (4.120) en la aproximación de sub-horizonte en el espacio de Fourier queda

$$k^2\Psi = -4\pi a^2 \bar{\rho}_m \delta_m, \tag{5.6}$$

teniendo en cuenta la relación (4.125), se tiene

$$k^2\Phi = -4\pi a^2 \bar{\rho}_m \delta_m, \tag{5.7}$$

la ecuación anterior corresponde la ecuación de Poisson en el espacio de Fourier. Reemplazando la ecuación anterior en (5.5) se llega a

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - 4\pi a^2 \bar{\rho}\delta_m = 0. \tag{5.8}$$

Esta expresión da el crecimiento de las perturbaciones de la densidad relativa de materia [41],i.e., el crecimiento de estructuras [45].

5.1.2 Aproximación sub-horizonte en Escalar-Tensor

Sin importar qué forma se utilice en las perturbaciones cosmológicas para ST[2], los resultados en la aproximación sub-horizonte son los mismos.
La componente tiempo-tiempo perturbada (4.163) o (4.170) en la aproximación de sub-horizonte en el espacio de Fourier queda

$$2k^2\Psi\bar{f} = -a^2\delta\rho + k^2\bar{f}_\phi\delta\phi. \tag{5.9}$$

Para calcular $\delta\phi$ de la ecuación anterior, se toma $\bar{\omega} = 1$ en la ecuación (4.178), (teniendo en cuenta que se está trabajando en la aproximación sub-horizonte en el espacio de Fourier)

$$-k^2\delta\phi + \frac{1}{2}a^2\bar{f}_\phi\delta R = 0, \tag{5.10}$$

de la ecuación (4.84) se tiene que

$$\delta R = a^{-2}[-6\Psi'' + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi], \tag{5.11}$$

la cual, aplicando la aproximación queda

$$\delta R = -2a^{-2}k^2(2\Psi - \Phi), \tag{5.12}$$

reemplazando δR en la ecuación (5.10), se llega a

$$\delta\phi = (\Phi - 2\Psi)\bar{f}_\phi. \tag{5.13}$$

[2] Se encontró que habían dos formar de perturbar las ecuaciones en ST, para mayor detalle ver capítulo anterior.

Utilizando la relación (4.168) en la ecuación anterior se tiene

$$\delta\phi = \left(-\Phi - 2\frac{\bar{f}_\phi}{\bar{f}}\delta\phi\right)\bar{f}_\phi,$$

obteniendo

$$\delta\phi = -\frac{\bar{f}_\phi}{\left(1+2\frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}\right)}\Phi, \tag{5.14}$$

se puede ver que las perturbaciones del campo escalar en teorías de gravedad Escalar-Tensor no dependen del número de onda en la aproximación sub-horizonte.
Reemplazando las expresiones $\delta\phi$ y (4.168) en la ecuación (5.9) se llega a

$$k^2\Phi = -\frac{a^2}{2\bar{f}}\left(\frac{2+4\frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}}{2+3\frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}}\right)\delta\rho_m, \tag{5.15}$$

el cual se puede expresar como

$$k^2\Phi = -4\pi G_{\text{eff}}^{ST} a^2\bar{\rho}_m\delta_m, \tag{5.16}$$

donde

$$G_{\text{eff}}^{ST} = \frac{1}{8\pi\bar{f}}\left(\frac{2+4\frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}}{2+3\frac{\bar{f}_\phi^2}{\bar{f}}}\right), \tag{5.17}$$

es la constante gravitacional efectiva para ST[64].
La evolución lineal de las densidades de materia en escalas sub-horizonte para teorías de gravedad Escalar-Tensor está dada por

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - 4\pi G_{\text{eff}}^{ST} a^2\bar{\rho}_m\delta_m = 0, \tag{5.18}$$

donde se ha usado (5.5). La ecuación anterior está de acuerdo con las referencias [64, 65].

5.2 Aproximación sub-horizonte en teorías f(R)

Sin importar que forma se utilice en las perturbaciones cosmológicas para $f(R)$, los resultados en la aproximación sub-horizonte son los mismos.
La componente tiempo-tiempo perturbada (4.190) o (4.196) en la aproximación de sub-horizonte en el espacio de Fourier queda

$$2k^2\Psi\bar{f}_R = -a\delta\rho_m + k^2\bar{f}_{RR}\delta R, \tag{5.19}$$

reemplazando la relación (4.195) en la ecuación anterior se tiene

$$k^2\Phi = -\frac{a^2}{2\bar{f}_R}\delta\rho_m - \frac{k^2}{2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R. \tag{5.20}$$

Utilizando la ecuación (5.12) se llega a

$$k^2\Phi = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{1+4\frac{k^2}{a^2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}}{1+3\frac{k^2}{a^2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}}\right)\delta\rho_m, \tag{5.21}$$

la cual se puede reescribir como

$$k^2\Phi = -4\pi G_{\text{eff}}^{f(R)} a^2 \bar{\rho}_m \delta_m. \tag{5.22}$$

Esta es la ecuación de Poisson en el espacio de Fourier en teorías $f(R)$, donde

$$G_{\text{eff}}^{f(R)} = \frac{1}{8\pi \bar{f}_R}\left(\frac{1+4\frac{k^2}{a^2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}}{1+3\frac{k^2}{a^2}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}}\right), \tag{5.23}$$

es la constante gravitacional efectiva para teorías $f(R)$.
La evolución lineal de las densidades de materia en escalas sub-horizonte para teorías de gravedad $f(R)$ está dada por

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - 4\pi G_{\text{eff}}^{f(R)} a^2 \bar{\rho}\delta_m = 0, \tag{5.24}$$

donde se ha usado (5.5). La ecuación anterior se ha verificado con las referencias [66, 67].

Capítulo 6

Equivalencia entre teorías f(R) y Escalar-tensor

En el presente capítulo se estudia la equivalencia entre las teorías de gravedad $f(R)$ y Escalar-Tensor, mostrando sus relaciones entre las acciones, ecuaciones de Friedmann en el universo homogéneo e isotrópico y además entre las perturbaciones cosmológicas.
Los resultados en las equivalencias de perturbaciones cosmológicas son propios de la tesis.

6.1 Correspondencia entre la acciones

La acción para teorías $f(R)$ es

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}f(R) + S^{(m)}, \tag{6.1}$$

donde $f(R)$ es una función no lineal del escalar de Ricci. Para observar la equivalencia con la teoría escalar-tensor, se introduce la siguiente acción[1]

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(\psi(\phi)R - V(\phi)), \tag{6.2}$$

donde se ha incluido ϕ como campo auxiliar.
Siempre que $f_{\phi\phi} \neq 0$, se puede tomar

$$\psi = f_\phi \tag{6.3}$$

$$V(\phi) = \phi f_\phi - f(\phi) = \phi\psi - f(\phi), \tag{6.4}$$

quedando la acción

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}(f_\phi(R-\phi) + f(\phi)). \tag{6.5}$$

Si $\phi = R$, se tiene que

$$\psi = f_R \tag{6.6}$$

y se recobra la acción (2.129). Es más, la variación respecto a ϕ de la acción anterior da

$$f_{\phi\phi}(R-\phi) = 0, \tag{6.7}$$

[1]Ver la acción (2.120.)

se ve que si $f_{\phi\phi} \neq 0$ implica que

$$\phi = R. \tag{6.8}$$

La acción (6.2) corresponde a la acción de escalar-tensor (2.81) con el parámetro $\omega(\phi) = 0$.

6.2 Equivalencia en las ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo para la teoría $f(R)$ son

$$G_{ab} f_R = T_{ab}^{(m)} + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \Box f_R + \frac{1}{2} g_{ab}(f - R f_R). \tag{6.9}$$

Tomando la relación (6.6) en las ecuaciones de campo se obtiene

$$\begin{aligned} G_{ab}\psi &= T_{ab}^{(m)} + \nabla_a \nabla_b \psi - g_{ab} \Box \psi + \frac{1}{2} g_{ab}(f(\phi) - \phi\psi) \\ &= T_{ab} + \nabla_a \nabla_b \psi - g_{ab} \Box \psi - g_{ab} V(\phi), \end{aligned}$$

donde se ha usado (6.4), con el potencial reescalado por $\frac{1}{2}$. La ecuación anterior concuerda con las ecuaciones de campo (2.120) con $\omega(\phi) = 0$.

6.3 Equivalencia en las ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann espacialmente plana[2] para teorías $f(R)$ en función del tiempo conformal están dadas por

$$3\mathcal{H}^2 f_R = \rho a^2 + \frac{a^2}{2}(R f_R - f(R)) - 3\mathcal{H} f_{RR} R' \tag{6.10}$$

y

$$-(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) f_R = p a^2 + \mathcal{H} R' f_{RR} + \frac{a^2}{2}(f(R) - R f_R) + R'' f_{RR} + R'^2 f_R^{(3)}. \tag{6.11}$$

donde $f_{RR} = \dfrac{d^2 f(R)}{dR^2}$ y $f_R^{(3)} = \dfrac{d^3 f(R)}{dR^3}$.
Teniendo en cuenta la relación (6.6) se tiene

$$f_{RR} = \frac{d\psi}{dR} = \frac{1}{R'}\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{\psi'}{R'} = \frac{\psi'}{\phi'} = \frac{d\psi}{d\phi} = \psi_\phi \tag{6.12}$$

$$f_R^{(3)} = \frac{1}{R'}\frac{d}{d\eta}\frac{\psi'}{R'} = \frac{\psi''}{R'^2} - \frac{R''\psi'}{R'^3} = \frac{1}{\phi'}\frac{d}{d\eta}\frac{\psi'}{\phi'} = \psi_{\phi\phi}, \tag{6.13}$$

donde se ha usado la equivalencia (6.8).
Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.4), (6.6) y (6.12), en la primera ecuación de Friedmann para $f(R)$ se tiene

$$3\mathcal{H}^2\psi = \rho a^2 + V a^2 - 3\mathcal{H}\psi' \tag{6.14}$$

donde se ha reescalado V por un factor de $\frac{1}{2}$. La ecuación anterior está de acuerdo con (3.31), la cual es la componente tiempo-tiempo de la ecuación de Friedmann

[2]Tomar $K = 0$ en las ecuaciones de Friedmann.

para escalar-tensor con $\omega = 0$.
Realizando lo mismo para la segunda ecuación de Friedmann para $f(R)$ se llega a

$$-(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\psi = pa^2 + \mathcal{H}\phi'\psi - Va^2 + \phi''\psi_\phi + \phi'^2\psi_{\phi\phi}, \tag{6.15}$$

donde se ha usado (6.13). Esta ecuación concuerda con (3.32), la cual es la componente espacio-espacio de la ecuación de Friedmann para escalar-tensor con $\omega = 0$.

6.4 Equivalencia en las perturbaciones cosmológicas escalares en el gauge de Newton conforme

En el capítulo 4, se calcularon las perturbaciones cosmológicas lineales en el gauge de Newton conforme, para BD, ST y $f(R)$. Se mostró que había dos maneras de calcular las perturbaciones para cada una de esas teorías. En la literatura es más común encontrar las perturbaciones en la I-forma [68, 69]. Lo que se debe tener en cuenta para calcular las equivalencias es que ambas teorías se hayan perturbado de la misma forma.
En esta sección se van a mostrar las equivalencias en las perturbaciones cosmológicas para las dos formas en ST y $f(R)$.

6.4.1 I-forma

La derivada del potencial (6.4) es

$$\bar{V}_\phi = \bar{f}_\phi + \bar{\phi}\bar{f}_{\phi\phi} - \bar{f}_\phi = \bar{\phi}\bar{f}_{\phi\phi} = \bar{\phi}\bar{\psi}_\phi. \tag{6.16}$$

Para ver la equivalencia entre las perturbaciones de las teorías, se analiza el siguiente término

$$\frac{\bar{R}}{2}\bar{f}_{RR} = \frac{1}{2}\bar{\phi}\bar{\psi}_\phi = \bar{V}_\phi, \tag{6.17}$$

donde se han usado las ecuaciones (6.8), (6.12) y el potencial se ha reescalado por el factor de $\frac{1}{2}$.
Usando los resultados anteriores en la ecuación de perturbación para la componente tiempo-tiempo de Friedmann para $f(R)$ (4.190) se tiene

$$\begin{aligned}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\bar{\psi} - 3\mathcal{H}^2\bar{\psi}_\phi\delta\phi = -a^2\delta\rho - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi \\ - \bar{\psi}_\phi\nabla^2\delta\phi + 3\mathcal{H}(\bar{\psi}_\phi\delta\phi' + \bar{\psi}_{\phi\phi}\bar{\phi}'\delta\phi) - 6\mathcal{H}\bar{\psi}_\phi\bar{\phi}\Phi - 3'\bar{\psi}_\phi\bar{\phi}'\Psi,\end{aligned}$$

la cual concuerda con la componente tiempo-tiempo de la ecuación de Friedmann perturbada (I-forma) para ST (4.163), con $\bar{\omega}(\phi) = 0$.
Reemplazando las equivalencias encontradas a la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio (4.192) en $f(R)$, se llega a

$$\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\ &+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{\psi} + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\bar{\psi}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu} = a^2(\delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) \\ &- a^2\bar{V}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu} + \bar{\psi}_\phi(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta\phi + \mathcal{H}(\bar{\psi}_\phi\delta\phi' + \bar{\phi}'\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi)\delta_{\mu\nu} \\ &- 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\bar{\psi}_\phi\Phi\delta_{\mu\nu} + (2\bar{\phi}'\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi' + \bar{\phi}'^2\bar{\psi}^{(3)}_\phi\delta\phi + \bar{\psi}_\phi\delta\phi'' + \bar{\phi}''\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi)\delta_{\mu\nu} \\ &- 2\Phi(\bar{\phi}'^2\bar{\psi}_{\phi\phi} + \bar{\phi}''\bar{\psi}_\phi)\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{\phi}'\bar{\psi}_\phi\delta_{\mu\nu},\end{aligned}$$

la cual concuerda con la componente perturbada espacio-espacio de Friedmann (I-forma) para ST (4.172), con $\bar{\omega}(\phi) = 0$.

6.4.2 II-forma

En la II-forma, el siguiente término aparece de manera concurrente en las perturbaciones en $f(R)$

$$\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R = \frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\delta\phi. \tag{6.18}$$

Además,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\bar{f}\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\delta R &= \frac{1}{2}\bar{f}(\phi)\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\delta\phi \\ &= (\bar{\psi}\bar{\phi} - \bar{V})\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\delta\phi \\ &= \left(\bar{V}_\phi - \bar{V}\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\right)\delta\phi,\end{aligned} \tag{6.19}$$

donde se han usado las ecuaciones (6.4) (6.6), (6.8) y (6.16). Cabe recordar que el potencial se ha reescalado por $\frac{1}{2}$.
Usando los resultados anteriores en la ecuación de perturbación para la componente tiempo-tiempo de Friedmann para $f(R)$ (4.196) se tiene

$$\begin{aligned}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\bar{\psi} &= a^2\left(\bar{\rho}\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\delta\phi - \delta\rho\right) - a^2\left(\bar{V}_\phi - \bar{V}\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\right)\delta\phi \\ &- \bar{\psi}_\phi\nabla^2\delta\phi + 3\mathcal{H}(\bar{\psi}_\phi\delta\phi' + \bar{\psi}_{\phi\phi}\bar{\phi}'\delta\phi) - 3\mathcal{H}\frac{(\bar{\psi}_\phi)^2}{\bar{\psi}}\bar{\phi}'\delta\phi - 6\mathcal{H}\Phi\bar{\psi}_\phi\bar{\phi} - 3\Psi'\bar{\psi}_\phi\bar{\phi}',\end{aligned}$$

la cual concuerda con la componente tiempo-tiempo de la ecuación de Friedmann perturbada (II-forma) para ST (4.170), con $\bar{\omega}(\phi) = 0$.
Reemplazando las equivalencias encontradas a la ecuación de perturbación de Friedmann para la componente espacio-espacio (4.197) en $f(R)$, se obtiene

$$\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\ &+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}]\bar{\psi} = a^2(\delta p\delta_{\mu\nu} + \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi)) - a^2\bar{p}\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\delta\phi\delta_{\mu\nu} \\ &- a^2\left(\bar{V}_\phi - \bar{V}\frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}\right)\delta\phi\delta_{\mu\nu} + \bar{\psi}_\phi(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta\phi + \mathcal{H}(\bar{\psi}_\phi\delta\phi' + \bar{\phi}'\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi)\delta_{\mu\nu} \\ &- \mathcal{H}\bar{\phi}'\frac{\bar{\psi}_\phi^2}{\bar{\psi}}\delta\phi\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\bar{\psi}_\phi\Phi\delta_{\mu\nu} + (2\bar{\phi}'\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi' + \bar{\phi}'^2\bar{\psi}_\phi^{(3)}\delta\phi + \bar{\psi}_\phi\delta\phi'' + \bar{\phi}''\bar{\psi}_{\phi\phi}\delta\phi)\delta_{\mu\nu} \\ &- \frac{\bar{\psi}_\phi}{\bar{\psi}}(\bar{\phi}'^2\bar{\psi}_{\phi\phi} + \bar{\phi}''\bar{\psi}_\phi)\delta\phi\delta_{\mu\nu} - 2\Phi(\bar{\phi}'^2\bar{\psi}_{\phi\phi} + \bar{\phi}''\bar{\psi}_\phi)\delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi')\bar{\phi}'\bar{\psi}_\phi\delta_{\mu\nu},\end{aligned}$$

la cual concuerda con la componente espacio-espacio de la ecuación de Friedmann perturbada (II-forma) para ST (4.165).

6.5 Ejemplo en la equivalencia de las teorías

Se comprobaron las equivalencias entre las teorías ST y $f(R)$ en forma general. A continuación se muestran 2 teorías como ejemplos particulares. La importancia de

mostrar estos ejemplos radica en ver como se pueden construir los potenciales para ST partiendo del modelo $f(R)$.
Las 2 teorías que se trabajan de $f(R)$ son: las propuestas por Starobinsky [70] y Waine-Hu & Ignacy Sawicki [71].
El modelo de Starobinsky es un modelo de inflación cósmica cuyas perturbaciones en la época inflacionaria fueron primeramente discutidas por Mukhanok y el mismo Starobinsky [72, 73]. Sus predicciones concuerdan con los datos recientes del CMB [74]. Para mas discusiones sobre este modelo, ver [75].
El modelo de Hu-Sawicki es un modelo capaz de reproducir la aceleración del universo (concordando con varias pruebas [76, 77, 78]) y a la vez satisface las pruebas para el sistema solar [71].
En estos modelos se construye el potencial partiendo del $f(R)$ dado, mostrando las equivalencias entre las ecuaciones de Friedmann background y las perturbadas.

6.5.1 Modelo de Starobinsky

El modelo de Starobinsky está dado por

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}, \tag{6.20}$$

donde la constante M tiene dimensión de masa.
Para construir el potencial $V(\phi)$ de Starobinsky, primero se calcula la derivada de $f(R)$

$$f_R = 1 + \frac{R}{3M^2} \tag{6.21}$$

De la ecuación (6.6) se tiene

$$\phi = 1 + \frac{R}{3M^2}, \tag{6.22}$$

por tanto

$$R = 3M^2(\phi - 1), \tag{6.23}$$

donde se ha tomado $\psi(\phi) = \phi$.
Ahora, $V = R\phi - f(R)$ usando la equivalencia del potencial (6.4), por lo cual

$$\begin{aligned} V(\phi) &= 3M^2(\phi-1)\phi - 3M^2(\phi-1) - \frac{3}{2}(\phi-1)^2M^2 \\ &= \frac{3}{4}M^2(\phi-1)^2, \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde se ha reemplazado (6.23) en los términos que incluían a R, además, como se ha mencionado con anterioridad el potencial se ha reescalado por $\frac{1}{2}$ [76].

Equivalencia en las ecuaciones de Friedmann

Del modelo, se calculan las siguientes relaciones

$$f_{RR} = \frac{1}{3M^2}. \tag{6.25}$$

$$Rf_R - f(R) = \frac{R^2}{6M^2}. \tag{6.26}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de Friedmann (3.39) y (3.40) se obtiene

$$3\mathcal{H}^2\left(1+\frac{R}{3M^2}\right)=\rho a^2+a^2\frac{R^2}{12M^2}-\frac{\mathcal{H}R'}{M^2} \tag{6.27}$$

$$-(2\mathcal{H}+\mathcal{H}^2)\left(1+\frac{R}{3M^2}\right)=pa^2+\frac{\mathcal{H}R'}{3M^2}-a^2\frac{R^2}{12M^2}+\frac{R''}{3M^2}. \tag{6.28}$$

Las ecuaciones de Friedmann para Brans-Dicke con el factor $\omega=0$ y el potencial reescalado son

$$3\mathcal{H}^2\phi=\rho a^2-3\mathcal{H}\phi'+Va^2 \tag{6.29}$$

$$-(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\phi=pa^2+\phi''+\mathcal{H}\phi'-Va^2. \tag{6.30}$$

Usando el potencial (6.24), y debido a la relación de equivalencia $\phi=f_R$, se tiene

$$\begin{aligned} V&=\frac{3}{4}M^2\left(1+\frac{R}{3M^2}-1\right)^2\\ &=\frac{R^2}{12M^2}, \end{aligned} \tag{6.31}$$

donde se ha usado la ecuación (6.21). Reemplazando las equivalencias obtenidas en las ecuaciones de Friedmann de BD, se ven que son las mismas que las encontradas en la teoría de $f(R)$.

Equivalencia en las perturbaciones Cosmológicas

Se muestran las equivalencias en las perturbaciones cosmológicas en las dos formas para BD y $f(R)$.

I-forma

Las ecuaciones de perturbación para las componentes tiempo-tiempo (4.190) y espacio-espacio (4.192) para el modelo de Starobinsky en $f(R)$ son

$$\begin{aligned} &(-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi)\left(1+\frac{\bar{R}}{3M^2}\right)-\left(\frac{\mathcal{H}^2}{M^2}\right)\delta R=-a^2\delta\rho\\ &-a^2\left(\frac{\bar{R}}{6M^2}\right)\delta R-\left(\frac{1}{3M^2}\right)\nabla^2\delta R+\left(\frac{\mathcal{H}}{M^2}\right)\delta R'\\ &-2\mathcal{H}\left(\frac{\bar{R}'}{M^2}\right)\Phi-\left(\frac{\bar{R}'}{M^2}\right)\Psi'. \end{aligned} \tag{6.32}$$

y

$$
\begin{aligned}
&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}] \left(1 + \frac{\bar{R}}{3M^2}\right) - \left(\frac{2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}{3M^2}\right) \delta R \delta_{\mu\nu} = a^2 \delta p \delta_{\mu\nu} \\
&+ a^2 \bar{p}(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi) - a^2 \left(\frac{\bar{R}}{6M^2}\right) \delta R \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{3M^2}\right)(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R \\
&+ \left(\frac{\mathcal{H}}{3M^2}\right) \delta R' \delta_{\mu\nu} - \left(\frac{2\mathcal{H}\bar{R}'}{3M^2}\right) \Phi \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{3M^2}\right) \delta R'' \delta_{\mu\nu} \\
&- \left(\frac{2\bar{R}''}{3M^2}\right) \Phi \delta_{\mu\nu} - (\Phi' + 2\Psi') \left(\frac{\bar{R}'}{3M^2}\right) \delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Ya calculadas las perturbaciones en $f(R)$, se procede a calcular las componentes perturbadas en BD. Las componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio con $\omega = 0$ son

$$
\begin{aligned}
&[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\bar{\phi} - 3\mathcal{H}^2\delta\phi = -a^2\delta\rho + 3\mathcal{H}\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi - \nabla^2\delta\phi \\
&\quad - 3\bar{\phi}'\Psi' - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\big([2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu} \\
&+ (\Psi - \Phi)_{,\mu\nu}\big)\bar{\phi} + (-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta\phi\delta_{\mu\nu} = a^2\Big(\delta p \delta_{\mu\nu} + \bar{p}\left(\Pi_{,\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi\right)\Big) \\
&+ \Big(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \nabla^2\delta\phi\delta_{\mu\nu} - 2\bar{\phi}''\Phi\delta_{\mu\nu} + \delta\phi''\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi\delta_{\mu\nu} + \mathcal{H}\delta\phi'\delta_{\mu\nu} \\
&- (2\Psi' + \Phi')\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu}\Big) - a^2\bar{V}_\phi\delta\phi\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

De la ecuación (6.24) se ve que

$$
V_\phi = \frac{6}{4}M^2(\phi - 1) = \frac{R}{2}, \tag{6.34}
$$

donde se ha usado la equivalencia (6.22). Reemplazando estos valores y del hecho que $\delta\phi = \frac{\delta R}{3M^2}$, se puede ver que las ecuaciones perturbadas en BD con la equivalencia corresponden a las ecuaciones perturbadas en $f(R)$.

II-forma

Para calcular las ecuaciones de perturbación para $f(R)$ en el modelo de Starobinsky en la II-forma se tendrán en cuenta las siguientes relaciones

$$
\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} = \frac{1}{3M^2 + R} \tag{6.35}
$$

$$
\frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} = \frac{1}{3M^2(3M^2 + R)}, \tag{6.36}
$$

donde se han usado las ecuaciones (6.21) y (6.25). La ecuaciones de perturbación para las componentes tiempo-tiempo (4.196) y espacio-espacio (4.197) para el modelo de Starobinsky en $f(R)$ de la II-forma son

$$\begin{aligned}(-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi)\left(1+\frac{\bar{R}}{3M^2}\right) &= -\frac{a^2}{2(3M^2+\bar{R})}\left(\bar{R}+\frac{\bar{R}^2}{6M^2}\right)\delta R\\ -\frac{1}{3M^2}\nabla^2\delta R + \frac{\mathcal{H}}{M^2}\delta R' - \frac{\mathcal{H}\bar{R}'}{M^2(3M^2+\bar{R})}\delta R - \frac{2\mathcal{H}\bar{R}'}{M^2}\Phi - \frac{\bar{R}'}{M^2}\Psi' \end{aligned} \tag{6.37}$$

y

$$\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi-\Psi) + \mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi') + (4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\ &+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]\left(1+\frac{\bar{R}}{3M^2}\right) = -\frac{a^2}{2(3M^2+\bar{R})}\left(\bar{R}+\frac{\bar{R}^2}{6M^2}\right)\delta R\\ &+\frac{1}{3M^2}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R + \frac{\mathcal{H}}{3M^2}\delta R'\delta_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{H}\bar{R}'}{3M^2(3M^2+\bar{R})}\delta R\delta_{\mu\nu}\\ &-\frac{2\mathcal{H}\bar{R}'}{3M^2}\Phi\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3M^2}\delta R''\delta_{\mu\nu} - \frac{\bar{R}''}{3M^2(3M^2+\bar{R})}\delta R\delta_{\mu\nu} - \frac{2\bar{R}''}{3M^2}\Phi\delta_{\mu\nu}\\ &-\frac{\bar{R}'}{3M^2}(\Phi'+2\Psi')\delta_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Las componentes tiempo-tiempo y espacio-espacio para la II-forma en BD son

$$\begin{aligned}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\bar{\phi} &= -3\mathcal{H}\frac{\bar{\phi}'}{\bar{\phi}}\delta\phi + 3\mathcal{H}\delta\phi' - 6\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi - \nabla^2\delta\phi - 3\bar{\phi}'\Psi'\\ &\quad - a^2\left(V_\phi - \frac{V}{\bar{\phi}}\right)\delta\phi.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&[[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi-\Psi) + \mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi') + (4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\ &+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]\bar{\phi} = (\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta\phi + \delta\phi''\delta_{\mu\nu} - 2\bar{\phi}''\Phi\delta_{\mu\nu} - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}}\delta\phi\delta_{\mu\nu}\\ &+\mathcal{H}\delta\phi'\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{H}\bar{\phi}'\Phi\delta_{\mu\nu} - \mathcal{H}\frac{\bar{\phi}'}{\bar{\phi}}\delta\phi\delta_{\mu\nu} - (2\Psi'+\Phi')\bar{\phi}'\delta_{\mu\nu} - a^2\left(V_\phi - \frac{V}{\bar{\phi}}\right)\delta\phi\delta_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de equivalencia (6.22), (6.24) y (6.34), las siguientes expresiones quedan

$$\bar{V}_\phi - \frac{\bar{V}}{\bar{\phi}} = \frac{\bar{R}}{2} - \frac{\bar{R}^2}{4(3M^2+\bar{R})} = \frac{3}{2(3M^2+\bar{R})}\left(\bar{R}+\frac{\bar{R}^2}{6M^2}\right) \tag{6.39}$$

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\bar{R}'}{3M^2+\bar{R}} \tag{6.40}$$

$$\frac{\phi''}{\phi} = \frac{\bar{R}''}{3M^2+\bar{R}}. \tag{6.41}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de Friedmann de BD, se ve que concuerdan con las ecuaciones de Friedmann en $f(R)$ para la II-forma.

6.5.2 Modelo de Hu-Sawicki

El modelo de Hu-Sawicki está dado por [79]

$$f(R) = -\frac{2\Lambda}{1 + 2\frac{\epsilon}{n}(\frac{4\Lambda}{R})^n}, \tag{6.42}$$

donde Λ es una escala de energía constante cuyo valor coincide con el el valor observado $\Lambda = 3H_0^2\Omega_\Lambda$ y $\epsilon \ll 1$ es un parámetro de deformación pequeño positivo. Este valor ha sido acotado por diferentes observaciones [80], tal que, en la expansión cosmológica, la teoría $f(R)$ es indistinguible del modelo ΛCDM
Debido a que ϵ es un valor muy pequeño, $f(R)$ se puede escribir en forma aproximada

$$f(R) = -2\Lambda\left(1 - 2\frac{\epsilon}{n}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^n\right). \tag{6.43}$$

La derivada es

$$f_R = -\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1}. \tag{6.44}$$

De la equivalencia (6.6), se tiene

$$\phi = -\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1}, \tag{6.45}$$

por tanto

$$R = 4\Lambda\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{6.46}$$

Reemplazando este valor en (6.43)

$$\begin{aligned} f &= -2\Lambda + \frac{\epsilon}{n}(4\Lambda)^{n+1}\left((4\Lambda)^{-n}\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right) \\ &= -2\Lambda + 4\Lambda\frac{\epsilon}{n}\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Usando la equivalencia del potencial (6.8), el potencial para Hu-Sawicki es

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -4\Lambda\phi\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{-\frac{1}{n+1}} + 2\Lambda - 4\Lambda\frac{\epsilon}{n}\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= 2\Lambda\left(1 - 2\epsilon\frac{n+1}{n}\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right). \end{aligned} \tag{6.48}$$

el cual está concorde con [79].

Equivalencia en las ecuaciones de Friedmann

De la ecuación (6.43) se obtienen las siguientes relaciones

$$f_{RR} = \frac{\epsilon(n+1)}{R}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} \tag{6.49}$$

$$f_R^{(3)} = -\frac{\epsilon(n+1)(n+2)}{R^2}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} \tag{6.50}$$

$$f_R^{(4)} = \frac{\epsilon(n+1)(n+2)(n+3)}{R^3}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} \tag{6.51}$$

$$Rf_R - f(R) = 2\Lambda\left(1 - 2\epsilon\frac{n+1}{n}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^n\right). \tag{6.52}$$

Reemplazando las relaciones anteriores en las ecuaciones de Friedmann para $f(R)$ (componente tiempo-tiempo (3.39) y componente espacio-espacio (3.40)) se obtiene

$$\begin{aligned} -3\mathcal{H}^2\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} &= \rho a^2 + a^2\Lambda\left(1 - 2\epsilon\frac{n+1}{n}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^n\right) \\ &\quad - 3\epsilon(n+1)\mathcal{H}\frac{R'}{R}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} \end{aligned} \tag{6.53}$$

y

$$\begin{aligned} (2\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} &= pa^2 + \epsilon(n+1)\frac{R'}{R}\mathcal{H}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} - \Lambda\left(1 - 2\epsilon\frac{n+1}{n}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^n\right) \\ &\quad + \epsilon(n+1)\frac{R''}{R}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1} - \epsilon(n+1)(n+2)\frac{R'^2}{R^2}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Para calcular las ecuaciones de Friedmann en BD, primero se calcula el potencial (6.48) a través de la equivalencia

$$V = 2\Lambda\left(1 - 2\epsilon\frac{n+1}{n}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^n\right). \tag{6.55}$$

Reemplazando este potencial en las ecuaciones de Friedmann de BD con $\omega = 0$ (6.29) y (6.30) se llegan a las mismas ecuaciones mostradas para $f(R)$.

Equivalencia en las perturbaciones Cosmológicas

A continuación se muestra las equivalencias de las perturbaciones en la I-forma para BD y $f(R)$, debido a que las ecuaciones encontradas son muy engorrosas. Aunque a lo largo de la sección ya se mostraron las equivalencias en manera general de las 2 formas posibles. Las ecuaciones de perturbación de Friedmann para $f(R)$ en la

I-forma son

$$
\begin{aligned}
&-(-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi)\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}-3\mathcal{H}^2\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\\
&=-a^2\delta\rho-\frac{a^2\bar{R}}{2}\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R-\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\nabla^2\delta R\\
&+3\mathcal{H}\Big(\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R'-\epsilon(n+1)(n+2)\frac{\bar{R}'}{\bar{R}^2}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\Big)\\
&-6\mathcal{H}\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\bar{R}'\Phi-3\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\bar{R}'\Psi'.
\end{aligned}
\tag{6.56}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&-[[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{\mu\nu}\\
&+(\Psi-\Phi)_{,\mu\nu}]\epsilon\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}-(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\delta_{\mu\nu}\\
&=a^2(\delta p\delta_{\mu\nu}+\bar{p}(\Pi_{,\mu\nu}-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\nabla^2\Pi))-\frac{a^2\bar{R}}{2}\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\delta_{\mu\nu}\\
&+\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}(\partial_\mu\partial_\nu-\delta_{\mu\nu}\nabla^2)\delta R+\mathcal{H}\Bigg(\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R'\\
&-\bar{R}'\frac{\epsilon(n+1)(n+2)}{\bar{R}^2}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\Bigg)\delta_{\mu\nu}-2\mathcal{H}\bar{R}'\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\Phi\delta_{\mu\nu}\\
&+\Bigg(-2\bar{R}'\frac{\epsilon(n+1)(n+2)}{\bar{R}^2}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta\bar{R}'+\bar{R}'^2\frac{\epsilon(n+1)(n+2)(n+3)}{\bar{R}^3}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\\
&+\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R''-\bar{R}''\frac{\epsilon(n+1)(n+2)}{\bar{R}^2}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta R\Bigg)\delta_{\mu\nu}\\
&-2\Phi\Bigg(-\bar{R}'^2\frac{\epsilon(n+1)(n+2)}{\bar{R}^2}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}+\bar{R}''\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\Bigg)\delta_{\mu\nu}\\
&-(\Phi'+2\Psi')\bar{R}'\frac{\epsilon(n+1)}{\bar{R}}\left(\frac{4\Lambda}{\bar{R}}\right)^{n+1}\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

Para calcular las equivalencias con BD, basta con tener en cuenta que

$$
V_\phi=-4\Lambda\left(\frac{|\phi|}{\epsilon}\right)^{-\frac{1}{n+1}}=R,
\tag{6.58}
$$

y

$$
\delta\phi=\frac{\epsilon(n+1)}{R}\left(\frac{4\Lambda}{R}\right)^{n+1}\delta R
\tag{6.59}
$$

donde se ha usado la equivalencia (6.45). Reemplazando estas equivalencias se llega a las mismas ecuaciones encontradas en $f(R)$ para la I-forma.

Capítulo 7

Conclusiones y Perspectivas

Las teorías de Gravedad Modificada (TGM), proveen una interesante alternativa para abordar el problema de la actual expansión acelerada del universo. A lo largo de este trabajo se vio un desarrollo en tres ramas de estas teorías, la teoría de Brans-Dicke, la teoría de Escalar-Tensor y de $f(R)$.
A continuación se muestra un resumen de lo realizado en cada capitulo.

- En el segundo capítulo, se hallaron las ecuaciones de campo partiendo de las acciones para las siguientes teorías, Relatividad General, Brans-Dicke, Escalar-Tensor y $f(R)$, donde en cada una de éstas, se enfatizó en el término de frontera correspondiente y el término de frontera de GYH.
  Como resultado importante y propio de esta tesis, en este capitulo se mostró que para BD el término de frontera se cancela con el término de GYH, como la tesis de Alejandro Guarnizo [51] mostró lo mismo para $f(R)$.

- En el tercer capítulo se mostraron las ecuaciones de Friedmann para un universo homogéneo e isotrópico en las teorías, Relatividad General, Brans-Dicke, Escalar-Tensor y $f(R)$. Este universo es la base para estudiar un modelo más realista.

- El cuarto capítulo es importante en este trabajo, ya que, éste muestra las perturbaciones cosmológicas a primer orden en el gauge de Newton conforme en todas las teorías expuestas con anterioridad. En las teorías de gravedad modificada se perturbaron las ecuaciones dependiendo de donde estuviera el factor implicado, en BD y ST dependían del campo escalar y de la función de éste respectivamente, y en $f(R)$ del factor f_R. La diferencia en las dos formas de perturbar las ecuaciones, solo es algebraica, la física es la misma, pero es importante tenerlas en cuenta, dado que, para realizar las equivalencias como se muestra en un capitulo posterior, las perturbaciones deben haberse hecho de la misma forma. En el desarrollo de las perturbaciones surge de forma directa una contribución a la ecuación de anisotropía, para BD en la forma $\frac{\delta\phi}{\phi}$, en ST, $\frac{f_\phi}{f}\delta\phi$ y en $f(R)$, $\frac{f_{RR}}{f_R}\delta R$.

- En el quinto capítulo se hizo una restricción sobre la época de dominio de materia de las perturbaciones encontradas en el capítulo anterior. Luego se realizó la aproximación sub-horizonte para cada una de las teorías desarrolladas a lo largo de este trabajo, llegando a una ecuación tipo Poisson para cada una de las teorías.

- En el último capítulo desarrollado, se realizó la parte mas importante en el trabajo, se mostraron las equivalencias entre las teorías ST y $f(R)$. Se presentaron las equivalencias en las perturbaciones cosmológicas en el gauge de Newton conforme en las dos formas obtenidas en el capítulo 4.
  Como ejemplo de las equivalencias, se tomaron las teorías de Starobinsky y Hu-Sawicki, partiendo de la equivalencia en las acciones se construyó el potencial, se hallaron las ecuaciones de Friedmann del background y perturbadas, donde se evidenciaron las equivalencias en las ecuaciones mencionadas.

Como perspectiva importante que deja el trabajo, es la posibilidad de realizar simulaciones cosmológicas con las ecuaciones encontradas tipo Poisson para las teorías Relatividad General, Brans-Dicke, Escalar-Tensor y $f(R)$.

Apéndice A

Evaluación del término $g^{ab}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^{c}{}_{ac}$

En (2.15) se calculó la variación de los símbolos de Christoffel

$$\delta\Gamma^{a}{}_{bc} = \frac{1}{2}\delta g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}), \tag{A.1}$$

usando la relación (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{a}{}_{bc} &= \frac{1}{2}(-g^{ae}g^{df}\delta g_{ef})(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}) \\
&= -g^{ae}\Gamma^{f}{}_{bc}\delta g_{ef} + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}) \\
&= \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc} - 2\Gamma^{f}{}_{bc}\delta g_{df}),
\end{aligned} \tag{A.2}$$

acá se uso la definición de $\Gamma^{f}{}_{bc}$ y se renombró algún índice mudo. Se suman y restan los siguientes términos $\Gamma^{f}{}_{bd}\delta g_{cf}$ y $\Gamma^{f}{}_{dc}\delta g_{fb}$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{a}{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(&\partial_b \delta g_{dc} - \Gamma^{f}{}_{bc}\delta g_{df} - \Gamma^{f}{}_{bd}\delta g_{cf} + \partial_c \delta g_{bd} - \Gamma^{f}{}_{bc}\delta g_{df} - \Gamma^{f}{}_{dc}\delta g_{fb} \\
&- \partial_d \delta g_{bc} + \Gamma^{f}{}_{bd}\delta g_{cf} + \Gamma^{f}{}_{dc}\delta g_{fb}).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

La derivada covariante de δg_{ab} es

$$\nabla_c \delta g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^{d}{}_{ca}\delta g_{bd} - \Gamma^{d}{}_{cb}\delta g_{ad}. \tag{A.4}$$

Teniendo en cuenta que el símbolo de Christoffel es simétrico $\Gamma^{a}{}_{bc} = \Gamma^{a}{}_{cb}$,ya que se está trabajando en una variedad libre de torsión, se tiene

$$\delta\Gamma^{a}{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\nabla_b \delta g_{dc} + \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{bc}). \tag{A.5}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
g^{ab}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^{c}{}_{ac} &= g^{ab}\left[\frac{1}{2}g^{dc}(\nabla_a \delta g_{cb} + \nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_c \delta g_{ab})\right] - g^{ad}\left[\frac{1}{2}g^{cb}\nabla_a \delta g_{bc}\right] \\
&= \frac{1}{2}g^{ab}g^{dc}(\nabla_a \delta g_{cb} + \nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_c \delta g_{ab}) - \frac{1}{2}g^{ad}g^{cb}\nabla_a \delta g_{bc}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Es conveniente expresar el resultado anterior en términos de δg^{ab}, para lo cual se utiliza (2.4), con lo cual

$$
\begin{aligned}
g^{ab}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^{c}{}_{ac} = {} & \frac{1}{2}g^{ab}g^{dc}\big[\nabla_a(-g_{ce}g_{bf}\delta g^{ef}) + \nabla_b(-g_{ae}g_{cf}\delta g^{ef}) \\
& - \nabla_c(-g_{ae}g_{bf}\delta g^{ef})\big] - \frac{1}{2}g^{ad}g^{cb}\nabla_a(-g_{be}g_{cf}\delta g^{ef}) \\
= {} & \frac{1}{2}g^{ab}g^{dc}\big[g_{ae}g_{bf}\nabla_c\delta g^{ef} - g_{ce}g_{bf}\nabla_a\delta g^{ef} - g_{ae}g_{cf}\nabla_b\delta g^{ef}\big] \\
& + \frac{1}{2}g^{ad}g^{cb}g_{be}g_{cf}\nabla_a\delta g^{ef},
\end{aligned}
$$

recordando que $g_{ab}g^{bc} = \delta^{c}{}_{a}$ y $\nabla^c = g^{ac}\nabla_a$, se tiene

$$
\begin{aligned}
g^{ab}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^{c}{}_{ac} = {} & \frac{1}{2}\big[\delta^{b}{}_{e}g_{bf}\nabla^d\delta g^{ef} - \delta^{a}{}_{f}\delta^{d}{}_{e}\nabla_a\delta g^{ef} - \delta^{b}{}_{e}\delta^{d}{}_{f}\nabla_b\delta g^{ef} \\
& + \delta^{c}{}_{e}g_{cf}\nabla^d\delta g^{ef}\big] \\
= {} & \frac{1}{2}[g_{ef}\nabla^d\delta g^{ef} - \nabla_a\delta g^{da} - \nabla_b\delta g^{db} + g_{ef}\nabla^d\delta g^{ef}],
\end{aligned}
$$

renombrando algunos índices mudos, se tiene

$$
g^{ab}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g^{ad}\delta\Gamma^{c}{}_{ac} = g_{ef}\nabla^d\delta g^{ef} - \nabla_c\delta g^{dc} \tag{A.7}
$$

Apéndice B

Términos con M_c y N^c

Se definen las siguientes cantidades

$$M_c = \phi g_{ef} \nabla_c \delta g^{ef} - \delta g^{ef} g_{ef} \nabla_c \phi, \tag{B.1}$$

y

$$N^c = \phi \nabla_f \delta g^{cf} - \delta g^{cf} \nabla_f \phi. \tag{B.2}$$

La derivada covariante de M_c es

$$\begin{aligned}
\nabla^c M_c &= \nabla^c(\phi g_{ef} \nabla_c \delta g^{ef}) - \nabla^c(\delta g^{ef} g_{ef} \nabla_c \phi) \\
&= (\nabla^c \phi) g_{ef} \nabla_c \delta g^{ef} + \phi g_{ef} \nabla^c \nabla_c \delta g^{ef} - (\nabla^c \delta g^{ef}) g_{ef} \nabla_c \phi \\
&\quad - \delta g^{ef} g_{ef} \nabla^c \nabla_c \phi,
\end{aligned}$$

donde el primer y tercer término se cancelan, con lo cual

$$\nabla^c M_c = \phi g_{ef} \Box \delta g^{ef} - \delta g^{ef} g_{ef} \Box \phi, \tag{B.3}$$

entonces

$$\phi g_{ef} \Box \delta g^{ef} = \nabla^c M_c + \delta g^{ef} g_{ef} \Box \phi. \tag{B.4}$$

La derivada covariante de N^c es

$$\begin{aligned}
\nabla_c N^c &= \nabla_c(\phi \nabla_f \delta g^{cf}) - \nabla_c(\delta g^{cf} \nabla_f \phi) \\
&= (\nabla_c \phi) \nabla_f \delta g^{cf} + \phi \nabla_c \nabla_f \delta g^{cf} - (\nabla_c \delta g^{cf}) \nabla_f \phi - \delta g^{cf} \nabla_c \nabla_f \phi,
\end{aligned}$$

donde se cancelan el primer y tercer término, por lo tanto

$$\nabla_c N^c = \phi \nabla_c \nabla_f \delta g^{cf} - \delta g^{cf} \nabla_c \nabla_f \phi \tag{B.5}$$

obteniendo así

$$\phi \nabla_c \nabla_f \delta g^{cf} = \nabla_c N^c + \delta g^{cf} \nabla_c \nabla_f \phi. \tag{B.6}$$

Restando (B.4) con (B.6), se tiene

$$\phi g_{ef} \Box \delta g^{ef} - \phi \nabla_c \nabla_f \delta g^{cf} = \delta g^{ef} (g_{ef} \Box \phi - \nabla_e \nabla_f \phi) + (\nabla^c M_c - \nabla_c N^c) \tag{B.7}$$

Apéndice C

Traza de las ecuaciones de campo de Brans-Dicke

Se obtuvieron las ecuaciones de campo de Brans-Dicke

$$\begin{aligned} G_{ab} =& \frac{8\pi}{\phi} T_{ab}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c \phi \right) \\ & + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_a \nabla_b \phi - g_{ab} \Box \phi \right) - \frac{V(\phi)}{2\phi} g_{ab}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Para hallar la traza, se multiplica la ecuación anterior por g^{ab}.

$$\begin{aligned} g^{ab} G_{ab} =& \frac{8\pi}{\phi} g^{ab} T_{ab}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g^{ab} g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c \phi \right) \\ & + \frac{1}{\phi} \left(g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - g^{ab} g_{ab} \Box \phi \right) - \frac{V(\phi)}{2\phi} g^{ab} g_{ab}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

La traza del tensor de Einstein

$$\begin{aligned} g^{ab} G_{ab} &= g^{ab} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \\ &= R - \frac{1}{2} R(4) \\ &= -R, \end{aligned} \tag{C.3}$$

donde se ha usado el hecho que $R = g^{ab} R_{ab}$ y $g^{ab} g_{ab} = 4$, ya que es la dimensión del espacio-tiempo en el que se está trabajando.
Recordando que $\nabla^c = g^{ac} \nabla_a$ y la traza de momentum-energia $T^{(m)} = g^{ab} T_{ab}^{(m)}$, se tiene

$$\begin{aligned} -R =& \frac{8\pi}{\phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla^b \phi \nabla_b \phi - \frac{4}{2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi \right) \\ & + \frac{1}{\phi} \left(\nabla^b \nabla_b \phi - 4 \Box \phi \right) - \frac{4V(\phi)}{2\phi} \\ =& \frac{8\pi}{\phi} T^{(m)} - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi - 3 \frac{\Box \phi}{\phi} - 2 \frac{V(\phi)}{\phi}, \end{aligned} \tag{C.4}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos y el hecho que $\nabla^c \nabla_c \phi = \Box \phi$.
Finalmente, la traza de las ecuaciones de campo de BD da

$$R = -\frac{8\pi}{\phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi + 3 \frac{\Box \phi}{\phi} + 2 \frac{V(\phi)}{\phi} \tag{C.5}$$

Apéndice D

Escalar de Ricci R en términos de las cantidades Γ_a y C^c

El escalar de Ricci comúnmente se escribe de la siguiente manera

$$R = g^{ac}R_{ac} = g^{ac}\partial_b\Gamma^b{}_{ac} - g^{ac}\partial_a\Gamma^b{}_{bc} + g^{ac}\Gamma^d{}_{ac}\Gamma^e{}_{de} - g^{ac}\Gamma^d{}_{bc}\Gamma^b{}_{da}, \tag{D.1}$$

donde

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}[\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}],$$

en particular

$$\Gamma^b{}_{ba} = \frac{1}{2}g^{bd}[\partial_b g_{da} + \partial_a g_{bd} - \partial_d g_{ba}] = \frac{1}{2}g^{bd}\partial_a g_{bd}.$$

De (2.5) se tiene

$$\frac{\partial_a\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}g^{bd}\partial_a g_{bd},$$

por tanto

$$\boxed{\Gamma_a \equiv \Gamma^e{}_{ea} = \frac{\partial_a\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}g^{ed}\partial_a g_{ed}.} \tag{D.2}$$

Se multiplica el factor anterior por g^{cb}

$$\begin{aligned} g^{cb}\Gamma_b &= \frac{1}{2}g^{cb}g^{ef}\partial_b g_{ef} \\ &= \frac{1}{2}g^{cd}g^{ab}\partial_d g_{ab}, \end{aligned} \tag{D.3}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos.
De (2.4) se ve que

$$\partial_d g^{ab} = -g^{ae}g^{bf}\partial_d g_{ef},$$

la cual se puede reescribir

$$\begin{aligned} -\partial_d g^{cd} &= \frac{1}{2}g^{ce}g^{df}\partial_d g_{ef} + \frac{1}{2}g^{ce}g^{df}\partial_d g_{ef} \\ &= \frac{1}{2}g^{ab}g^{cd}\partial_b g_{ad} + \frac{1}{2}g^{ab}g^{cd}\partial_a g_{db}, \end{aligned} \tag{D.4}$$

donde se han renombrado algunos índices mudos.
Multiplicando g^{ab} por el símbolo de Christoffel mostrado en la parte superior, se tiene

$$g^{ab}\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{ab}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \tag{D.5}$$

El término anterior es igual a la resta de los términos (D.4) con (D.3), por lo tanto

$$\boxed{C^c \equiv g^{ab}\Gamma^c{}_{ab} = -\partial_d g^{cd} - g^{cb}\Gamma_b.} \tag{D.6}$$

Ya se ha encontrado los términos Γ_a y C^c, ahora se busca reescribir el escalar de Ricci en término de estos dos, para esto, se puede reescribir el siguiente término como

$$\frac{1}{2}\Gamma^b{}_{de}\partial_b g^{de} = -\frac{1}{2}\Gamma^b{}_{de}(g^{da}g^{ec}\partial_b g_{ac}) = -g^{ec}\Gamma^b{}_{de}\left(\frac{1}{2}g^{da}\partial_b g_{ac}\right),$$

donde se ha usado (2.4), además, si se suma un cero convenientemente, se tiene

$$\frac{1}{2}\Gamma^b{}_{de}\partial_b g^{de} = -g^{ec}\Gamma^b{}_{de}\left(\frac{1}{2}g^{da}(\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ac} - \partial_a g_{bc})\right),$$

por lo cual

$$\frac{1}{2}\Gamma^b{}_{da}\partial_b g^{da} = -g^{ac}\Gamma^b{}_{da}\Gamma^d{}_{bc}. \tag{D.7}$$

Haciendo el producto de Γ_d y C^d, se obtiene

$$\Gamma_d C^d = g^{ac}\Gamma^d{}_{ac}\Gamma^e{}_{de}. \tag{D.8}$$

Los términos (D.7) y (D.8) son las últimas dos componentes del escalar de Ricci (D.1), por tanto se ve que

$$R = R_1 + R_2 \tag{D.9}$$

donde

$$R_1 = g^{ac}\left(\partial_b\Gamma^b{}_{ac} - \partial_c\Gamma_a\right) \tag{D.10}$$

y

$$R_2 = \Gamma_b C^b + \frac{1}{2}\Gamma^b{}_{de}\partial_b g^{de}. \tag{D.11}$$

Apéndice E

Ecuaciones de Friedmann para la teorías de Brans-Dicke , Escalar-Tensor y f(R)

E.1 Ecuaciones de Friedmann para BD

Partiendo de las ecuaciones de campo para BD (2.65) se tiene

$$\begin{aligned}G_{ab} =&\frac{8\pi}{\phi}T^{(m)}_{ab} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right)\\&+\frac{1}{\phi}\left(\nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}\Box\phi\right) - \frac{V(\phi)}{2\phi}g_{ab},\end{aligned} \tag{E.1}$$

para la componente tiempo-tiempo se tiene

$$\begin{aligned}R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R =&\frac{8\pi}{\phi}\left(pg_{00} + (\rho+p)u_0u_0\right) + \frac{\omega}{\phi^2}(\dot\phi^2 - \frac{1}{2}g_{00}(-\dot\phi^2))\\&+\frac{1}{\phi}(\ddot\phi + g_{00}(\ddot\phi + 3H\dot\phi))\\R_{00} + \frac{1}{2}R =&\frac{8\pi}{\phi}\rho + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right)^2 - 3H\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) + \frac{V}{2\phi},\end{aligned} \tag{E.2}$$

donde se han usado las relaciones (3.19) y (3.20).
Reemplazando (3.5) y (3.6) en la ecuación anterior se tiene

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi}{3\phi}\rho + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right)^2 - H\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) - \frac{K}{a^2} + \frac{V}{6\phi}}, \tag{E.3}$$

para la componente espacio-espacio se tiene

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R =&\frac{8\pi}{\phi}T^{(m)}_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^c\phi\nabla_c\phi\right)\\&+\frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi\right) - \frac{V(\phi)}{2\phi}g_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{E.4}$$

ya que,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu \phi &= \cancelto{0}{\partial_\mu \partial_\nu \phi} - \Gamma^c_{\mu\nu}\partial_c \phi \\ &= -\Gamma^0_{\mu\nu}\dot{\phi} = -(a\dot{a}\bar{g}_{\mu\nu})\dot{\phi} \\ &= -g_{\mu\nu} H\dot{\phi}, \end{aligned} \tag{E.5}$$

se tiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} p + \frac{1}{2}\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi}\right) - \frac{V(\phi)}{2\phi}, \tag{E.6}$$

donde se han usado las relaciones (3.19) y (3.20).
Reemplazando (3.5) y (3.6) en la ecuación anterior se tiene

$$\boxed{2\dot{H} + H^2 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi}\right) + \frac{V(\phi)}{2\phi} + \frac{K}{a^2}.} \tag{E.7}$$

E.2 Ecuaciones de Friedmann para ST

Para calcular las ecuaciones de Friedmann para ST, se parte de las ecuaciones de campo de ST (2.120)

$$\begin{aligned} G_{ab} f(\phi) = T^{(m)}_{ab} &+ \omega(\phi)(\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2} g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi) \\ &+ (\nabla_a\nabla_b f(\phi) - g_{ab}\Box f(\phi)) - g_{ab} V(\phi), \end{aligned} \tag{E.8}$$

para la componente tiempo-tiempo se tiene

$$\begin{aligned} (R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00}) f(\phi) = T^{(m)}_{00} &+ \omega(\phi)(\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} g_{00}\nabla^c\phi\nabla_c\phi) \\ &+ (\ddot{f}(\phi) - g_{00}\Box f(\phi)) - g_{00} V(\phi). \end{aligned}$$

Asumiendo el universo espacialmente plano como un fluido perfecto y teniendo en cuenta (3.19), se llega a

$$(R_{00} + \frac{1}{2} R) f = \rho + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 + \ddot{f} + \Box f + V, \tag{E.9}$$

ya que

$$\begin{aligned} \Box f = \nabla^c\nabla_c f &= g^{cd}\partial_d\partial_c f - g^{cd}\Gamma^a_{cd}\partial_a f = g^{00}\ddot{f} - g^{c0}\cancelto{0}{\Gamma^0_{c0}}\dot{f} - g^{c\mu}\Gamma^0_{c\mu}\dot{f} \\ &= -\ddot{f} - g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\dot{f} = -\ddot{f} - a^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}(a\dot{a}\bar{g}_{\mu\nu})\dot{f} \\ &= -\ddot{f} - 3H\dot{f}, \end{aligned} \tag{E.10}$$

se obtiene la primera ecuación de Friedmann

$$\boxed{3fH^2 = \rho + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 + V - 3H\dot{f},} \tag{E.11}$$

donde se han usado las ecuaciones (3.5) y (3.6).
Para la componente espacio-espacio se tiene

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} f &= T^{(m)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\omega \nabla^c\phi\nabla_c\phi) \\
&\quad + (\nabla_\mu\nabla_\nu f - g_{\mu\nu}\Box f) - g_{\mu\nu}V(\phi) \\
(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R) f &= p g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\omega\dot\phi^2 \\
&\quad + (\nabla_\mu\nabla_\nu f + g_{\mu\nu}(\ddot f - 3H\dot f)) - g_{\mu\nu}V,
\end{aligned}
$$

como

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla_\nu f &= \cancelto{0}{\partial_\mu\partial_\nu f} - \Gamma^c_{\mu\nu}\partial_c f \\
&= -\Gamma^0_{\mu\nu}\dot f = -(a\dot a \bar g_{\mu\nu})\dot f \\
&= -g_{\mu\nu}H\dot f,
\end{aligned}
\tag{E.12}
$$

se tiene la segunda ecuación de Friedmann para ST

$$
\boxed{-2\dot H f - 3H^2 f = p + \frac{1}{2}\omega\dot\phi^2 + \ddot f + 2H\dot f - V,}
\tag{E.13}
$$

donde se ha usado (3.5) y (3.6).

E.3 Ecuaciones de Friedmann para f(R)

Las ecuaciones de campo para $f(R)$ son (2.147)

$$
G_{ab} f_R = T^{(m)}_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab}(f(R) - R f_R) + \nabla_a\nabla_b f_R - g_{ab}\Box f_R,
$$

para la componente tiempo-tiempo se tiene

$$
\begin{aligned}
(R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00}) f_R &= T^{(m)}_{00} + \frac{1}{2} g_{00}(f(R) - R f_R) + \nabla_0\nabla_0 f_R - g_{00}\Box f_R \\
(R_{00} + \frac{1}{2} R) f_R &= T^{(m)}_{00} - \frac{1}{2}(f(R) - R f_R) + \nabla_0\nabla_0 f_R + \Box f_R.
\end{aligned}
$$

Teniendo en mente que el escalar de Ricci R depende solamente de t, se hallan las siguientes relaciones

$$
\nabla_0\nabla_0 f_R = \nabla_0\dot f_R = \ddot f_R - \cancelto{0}{\Gamma^c_{00}}\partial_c f_R = \ddot f_R
\tag{E.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\Box f_R = \nabla^c\nabla_c f_R &= g^{cd}\partial_d\partial_c f_R - g^{cd}\Gamma^a_{cd}\partial_a f_R = g^{00}\ddot f_R - g^{c0}\cancelto{0}{\Gamma^0_{c0}}\dot f_R - g^{c\mu}\Gamma^0_{c\mu}\dot f_R \\
&= -\ddot f_R - g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\dot f_R = -\ddot f_R - a^{-2}\bar g^{\mu\nu}(a\dot a\bar g_{\mu\nu})\dot f_R \\
&= -\ddot f_R - 3H\dot f_R,
\end{aligned}
\tag{E.15}
$$

donde $\dot f_R = f_{RR}\dot R$ y $\ddot f_R = f^{(3)}_R \dot R^2 + f_{RR}\ddot R$.
Reemplazando los valores anteriores y las ecuaciones (3.5) y (3.6) se llega a la primera

ecuación de Friedmann

$$\boxed{3H^2 f_R = \rho + \frac{1}{2}(Rf_R - f(R)) - 3Hf_{RR}\dot{R}}, \tag{E.16}$$

donde se ha asumido el universo espacialmente plano como un fluido perfecto. Para la componente espacio-espacio se tiene

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} f_R &= T^{(m)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(f(R) - Rf_R) + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu}\Box f_R \\ (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) f_R &= T^{(m)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(f(R) - Rf_R) + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu}\Box f_R, \end{aligned}$$

calculando la siguiente relación

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu f_R &= \cancelto{0}{\partial_\mu \partial_\nu f_R} - \Gamma^c_{\mu\nu}\partial_c f_R \\ &= -\Gamma^0_{\mu\nu}\dot{f}_R = -(a\dot{a}\bar{g}_{\mu\nu})\dot{f}_R \\ &= -g_{\mu\nu} H \dot{f}_R, \end{aligned} \tag{E.17}$$

se llega a la segunda ecuación de Friedmann

$$\boxed{-(2\dot{H} + 3H^2) f_R = p + 2H\dot{R} f_{RR} + \frac{1}{2}(f(R) - Rf_R) + \ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f^{(3)}_R}, \tag{E.18}$$

donde se ha asumido el universo espacialmente plano como un fluido perfecto y se han reemplazado las ecuaciones (3.5), (3.6) y (E.15).

Apéndice F

Relaciones perturbadas para BD

Para hallar las relaciones perturbadas se usarán las componentes de conexión perturbadas (4.72). Primero se calcula

$$
\begin{aligned}
g^{oc}\nabla_c\phi' &= g^{0c}(\partial_c\phi' - \Gamma^d{}_{c0}\partial_d\phi) \\
&= g^{00}(\partial_0\phi' - \Gamma^0{}_{00}\partial_0\phi - \Gamma^\mu{}_{00}\partial_\mu\phi) \\
&= a^{-2}(-1+2\Phi)[\phi'' - (\mathcal{H}+\Phi')\phi' - \Phi_{,\mu}\,\partial_\mu\phi],
\end{aligned}
$$

donde se ha usado (4.69), como se está trabajando en perturbaciones lineales se tiene

$$
g^{oc}\nabla_c\phi' = a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'' + (\mathcal{H}+\Phi')\phi' - 2\Phi\mathcal{H}\phi' + \Phi_{,\mu}\,\partial_\mu\phi]. \tag{F.1}
$$

Para la segunda relación

$$
\begin{aligned}
g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi &= g^{c\mu}[\partial_c\partial_\nu\phi - \Gamma^d{}_{c\nu}\partial_d\phi] \\
&= g^{\kappa\mu}[\partial_\kappa\partial_\nu\phi - \Gamma^0{}_{\kappa\nu}\partial_0\phi - \Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu}\partial_\lambda\phi] \\
&= a^{-2}(1+2\Psi)\delta_{\kappa\mu}[\partial_\kappa\partial_\nu\phi - (\mathcal{H}\delta_{\kappa\nu} - (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi)+\Psi')\delta_{\kappa\nu})\phi' \\
&\quad - (-(\Psi_{,\nu}\,\delta^\lambda{}_\kappa + \Psi_{,\kappa}\,\delta^\lambda{}_\nu) + \Psi_{,\lambda}\,\delta_{\kappa\nu})\partial_\lambda\phi],
\end{aligned}
$$

donde se ha usado (4.69), despreciando términos de alto orden

$$
\begin{aligned}
g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi &= a^{-2}[(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu\phi - ((1+2\Psi)\mathcal{H} - (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi)+\Psi')(1+2\Psi))\delta_{\mu\nu}\phi' \\
&\quad - (-(\Psi_{,\nu}\,\delta_{\lambda\mu} + \Psi_{,\mu}\,\delta_{\lambda\nu}) + \Psi_{,\lambda}\,\delta_{\mu\nu})\partial_\lambda\phi] \\
&= a^{-2}[(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu\phi - (1+2\Psi)\mathcal{H}\delta_{\mu\nu}\phi' + (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi)+\Psi')\delta_{\mu\nu}\phi' \\
&\quad + (\Psi_{,\nu}\,\delta_{\lambda\mu} + \Psi_{,\mu}\,\delta_{\lambda\nu})\partial_\lambda\phi - \Psi_{,\lambda}\,\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu}],
\end{aligned}
$$

agrupando términos, finalmente se tiene

$$
\begin{aligned}
g^{c\mu}\nabla_c\partial_\nu\phi = a^{-2}[&(1+2\Psi)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi)\delta_{\mu\nu} + \Psi'\phi'\delta_{\mu\nu} \\
&+ \Psi_{,\nu}\,\partial_\mu\phi + \Psi_{,\mu}\,\partial_\nu\phi - \Psi_{,\lambda}\,\partial_\lambda\phi\delta_{\mu\nu}].
\end{aligned} \tag{F.2}
$$

Se halla la tercera relación perturbada

$$
\begin{aligned}
\Box\phi &= g^{ab}\nabla_a\partial_b\phi = g^{ab}(\partial_a\partial_b\phi - \Gamma^c{}_{ab}\partial_c\phi) \\
&= g^{0b}(\partial_0\partial_b\phi - \Gamma^c{}_{0b}\partial_c\phi) + g^{\mu b}(\partial_\mu\partial_b\phi - \Gamma^c{}_{\mu b}\partial_c\phi) \\
&= g^{00}(\partial_0\partial_0\phi - \Gamma^c{}_{00}\partial_c\phi) + g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^c{}_{\mu\nu}\partial_c\phi) \\
&= g^{00}(\partial_0\partial_0\phi - \Gamma^0{}_{00}\partial_0\phi - \Gamma^\mu{}_{00}\partial_\mu\phi) + g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^0{}_{\mu\nu}\partial_0\phi - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\partial_\kappa\phi),
\end{aligned}
$$

reemplazando la métrica y las conexiones perturbadas se encuentra

$$\begin{aligned}\Box\phi = {} & a^{-2}(-1+2\Phi)[\phi'' - (\mathcal{H}+\Phi')\phi' - \Phi,_{\mu}\partial_\mu\phi] \\ & + a^{-2}(1+2\Psi)\delta_{\mu\nu}[\partial_\mu\partial_\nu\phi - (\mathcal{H}\delta_{\mu\nu} - (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi)+\Psi')\delta_{\mu\nu})\phi' \\ & - (-(\Psi,_{\nu}\delta^{\kappa}_{\mu} + \Psi,_{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu}) + \Psi,_{\kappa}\delta_{\mu\nu})\partial_\kappa\phi],\end{aligned}$$

despreciando términos de segundo orden en la perturbación se tiene

$$\begin{aligned}\Box\phi = {} & a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'' + \nabla^2\phi(1+2\Psi) + \partial_\mu\phi(\Phi,_{\mu} - \Psi,_{\mu}) + 2\mathcal{H}\phi'(-1+2\Phi) \\ & + \phi'(3\Psi'+\Phi')]\end{aligned} \tag{F.3}$$

La cuarta relación perturbada es

$$\begin{aligned}\nabla^c\phi\nabla_c\phi &= g^{ac}\partial_a\phi\partial_c\phi \\ &= g^{0c}\partial_0\phi\partial_c\phi + g^{\mu c}\partial_\mu\phi\partial_c\phi \\ &= g^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\end{aligned}$$

reemplazando (4.69) se tiene

$$\nabla^c\phi\nabla_c\phi = a^{-2}[(-1+2\Phi)\phi'^2 + (1+2\Psi)(\partial\phi)^2], \tag{F.4}$$

donde $(\partial\phi)^2 = \delta_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$.

Apéndice G

Relaciones perturbadas para f(R)

Para hallar las relaciones perturbadas se usarán las componentes de conexión perturbadas (4.72). Primero se calcula

$$\begin{aligned}\nabla^0\nabla_0 f_R &= g^{00}(f_R'' - \Gamma^c{}_{00}\partial_c f_R)\\ &= a^{-2}(-1+2\Phi)(f_R'' - \Gamma^0{}_{00}f_R' - \Gamma^\lambda{}_{00}\partial_\lambda f_R)\\ &= a^{-2}(-1+2\Phi)(f_R'' - (\mathcal{H}+\Phi')f_R' - \Phi,_\lambda \partial_\lambda f_R)\end{aligned}$$

eliminando ordenes de orden superior

$$\nabla^0\nabla_0 f_R = a^{-2}((-1+2\Phi)f_R'' + (\mathcal{H}+\Phi')f_R' - 2\mathcal{H}\Phi f_R' + \Phi,_\lambda \partial_\lambda f_R). \tag{G.1}$$

Para la segunda relación

$$\begin{aligned}\nabla^\mu\nabla_\nu f_R &= g^{\mu\kappa}(\partial_\kappa\partial_\nu f_R - \Gamma^c{}_{\kappa\nu}\partial_c f_R)\\ &= g^{\mu\kappa}(\partial_\kappa\partial_\nu f_R - \Gamma^0{}_{\kappa\nu}f_R' - \Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu}\partial_\lambda f_R)\\ &= a^{-2}(1+2\Psi)\delta^{\mu\kappa}(\partial_\kappa\partial_\nu f_R - \mathcal{H}\delta_{\kappa\nu}f_R' + (2\mathcal{H}(\Phi+\psi)+\Psi')\delta_{\kappa\nu}f_R'\\ &\quad + (\Psi,_\nu \delta^\lambda{}_\kappa + \Psi,_\kappa \delta^\lambda{}_\nu)\partial_\lambda f_R - \Psi,_\lambda \delta_{\kappa\nu}\partial_\lambda f_R),\end{aligned}$$

eliminando ordenes de segundo orden, se tiene

$$\begin{aligned}\nabla^\mu\nabla_\nu f_R = a^{-2}&((1+2\Psi)\partial^\mu\partial_\nu f_R - (1+2\Psi)\mathcal{H}\delta^\mu{}_\nu f_R' + (2\mathcal{H}(\Phi+\Psi)+\Psi')\delta^\mu{}_\nu f_R'\\ &+ \Psi,_\nu \partial_\mu f_R + \Psi,_\mu \partial_\nu f_R - \Psi,_\lambda \partial_\lambda f_R \delta^\mu{}_\nu).\end{aligned} \tag{G.2}$$

Ahora se calcula $\Box f_R$, a partir de las relaciones halladas anteriormente

$$\begin{aligned}\Box f_R &= \nabla^0\nabla_0 f_R + \nabla^\mu\nabla_\mu f_R\\ &= a^{-2}((-1+2\Phi)f_R'' + (\mathcal{H}+\Phi')f_R' - 2\mathcal{H}\Phi f_R' + \Phi,_\lambda \partial_\lambda f_R) + a^{-2}((1+2\Psi)\partial^2 f_R\\ &\quad - 3(1+2\Psi)\mathcal{H}f_R' + 6\mathcal{H}(\Phi+\Psi)f_R' + 3\Psi' f_R' + \Psi,_\mu \partial_\mu f_R + \Psi,_\mu \partial_\mu f_R - 3\Psi,_\lambda \partial_\lambda f_R)\\ &= a^{-2}((-1+2\Phi)f_R'' + 2\mathcal{H}f_R'(-1+2\Phi) + (\Phi'+3\Psi')f_R' + (1+2\Psi)\nabla^2 f_R\\ &\quad + (\Phi,_\mu - \Psi,_\mu)\partial_\mu f_R).\end{aligned} \tag{G.3}$$

Apéndice H

Ecuaciones de momentum-energía perturbadas en el gauge de Newton conforme

La derivada covariante para el tensor momentum-energía es

$$\nabla_a T^a_{\ b} = \partial_a T^a_{\ b} + \Gamma^a_{\ ca} T^c_{\ b} - \Gamma^c_{\ ba} T^a_{\ c},$$

dado que $T^a_{\ b} = \bar{T}^a_{\ b} + \delta T^a_{\ b}$, entonces la derivada covariante queda

$$\begin{aligned}\nabla_a \bar{T}^a_{\ b} + \nabla_a \delta T^a_{\ b} &= \partial_a \bar{T}^a_{\ b} + \partial_a \delta T^a_{\ b} + (\bar{\Gamma}^a_{\ ca} + \delta\Gamma^a_{\ ca})(\bar{T}^c_{\ b} + \delta T^c_{\ b}) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^c_{\ ba} + \delta\Gamma^c_{\ ba})(\bar{T}^a_{\ c} + \delta T^a_{\ c}) \\ &= (\partial_a \bar{T}^a_{\ b} + \bar{\Gamma}^a_{\ ca}\bar{T}^c_{\ b} - \bar{\Gamma}^c_{\ ba}\bar{T}^a_{\ c}) + \partial_a \delta T^a_{\ b} + \bar{\Gamma}^a_{\ ca}\delta T^c_{\ b} + \bar{T}^c_{\ b}\delta\Gamma^a_{\ ca} \\ &\quad - \bar{\Gamma}^c_{\ ba}\delta T^a_{\ c} - \bar{T}^a_{\ c}\delta\Gamma^c_{\ ba},\end{aligned} \tag{H.1}$$

donde se han despreciado términos de orden superior en las perturbaciones. El paréntesis en la ecuación anterior es la derivada covariante del tensor momentum-energía del background, por lo tanto

$$\nabla_a \delta T^a_{\ b} = \partial_a \delta T^a_{\ b} + \bar{\Gamma}^a_{\ ca}\delta T^c_{\ b} + \bar{T}^c_{\ b}\delta\Gamma^a_{\ ca} - \bar{\Gamma}^c_{\ ba}\delta T^a_{\ c} - \bar{T}^a_{\ c}\delta\Gamma^c_{\ ba}. \tag{H.2}$$

Tomando $b = 0$ y dado que $\nabla_a \delta T^a_{\ b} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}0 &= \partial_0 \delta T^0_{\ 0} + \partial_\mu \delta T^\mu_{\ 0} + \bar{\Gamma}^0_{\ 00}\delta T^0_{\ 0} + \bar{\Gamma}^\mu_{\ 0\mu}\delta T^0_{\ 0} + \bar{T}^0_{\ 0}\delta\Gamma^0_{\ 00} + \bar{T}^0_{\ 0}\delta\Gamma^\mu_{\ 0\mu} \\ &\quad - \bar{\Gamma}^0_{\ 00}\delta T^0_{\ 0} - \bar{\Gamma}^\nu_{\ 0\mu}\delta T^\mu_{\ \nu} - \bar{T}^0_{\ 0}\delta\Gamma^0_{\ 00} - \bar{T}^\mu_{\ \nu}\delta\Gamma^\nu_{\ 0\mu},\end{aligned}$$

usando las ecuaciones (4.73), (4.74) y (4.119), se llega a

$$0 = -\delta\rho' + (\bar{\rho} + \bar{p})\nabla^2 v - 3\mathcal{H}\delta\rho + 3\bar{\rho}\Psi' - 3\mathcal{H}\delta p - \cancel{\mathcal{H}\bar{p}\nabla^2\Pi} + \cancel{\mathcal{H}\bar{p}\nabla^2\Pi} + 3\bar{p}\Psi',$$

organizando los términos se obtiene la ecuación de conservación de energía

$$\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\bar{\rho} + \bar{p})(\nabla^2 v + 3\Psi'). \tag{H.3}$$

Tomando $b = \mu$ se tiene

$$\begin{aligned}0 &= \partial_0 \delta T^0_{\ \mu} + \partial_\nu \delta T^\nu_{\ \mu} + \bar{\Gamma}^0_{\ 00}\delta T^0_{\ \mu} + \bar{\Gamma}^\nu_{\ 0\nu}\delta T^0_{\ \mu} + \bar{T}^\nu_{\ \mu}\delta\Gamma^0_{\ \nu 0} + \bar{T}^\nu_{\ \mu}\delta\Gamma^\kappa_{\ \nu\kappa} \\ &\quad - \bar{\Gamma}^\nu_{\ \mu 0}\delta T^0_{\ \nu} - \bar{\Gamma}^0_{\ \mu\nu}\delta T^\nu_{\ 0} - \bar{T}^0_{\ 0}\delta\Gamma^0_{\ \mu 0} - \bar{T}^\nu_{\ \kappa}\delta\Gamma^\kappa_{\ \mu\nu},\end{aligned}$$

usando las ecuaciones (4.73), (4.74) y (4.119), se llega a

$$0 = -(\bar{\rho}+\bar{p})' v_{,\mu} - (\bar{\rho}+\bar{p}) v'_{,\mu} + \delta p_{,\mu} + \bar{p}\nabla^2\Pi_{,\mu} - \frac{1}{3}\bar{p}\nabla^2\Pi_{,\mu} - \mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,\mu} - 3\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,\mu}$$
$$+ \bar{p}\Phi_{,\mu} - \cancel{\bar{p}\Psi_{,\mu}} - \cancel{3\bar{p}\Psi_{,\mu}} + \cancel{\bar{p}\Psi_{,\mu}} + \cancel{\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,\mu}} - \cancel{\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,\mu}} + \bar{\rho}\Phi_{,\mu} + \cancel{\bar{p}\Psi_{,\mu}} + \cancel{3\bar{p}\Psi_{,\mu}}$$
$$- \cancel{\bar{p}\Psi_{,\mu}},$$

quedando la ecuación de conservación del momentum

$$(\bar{\rho}+\bar{p})v' = (\bar{\rho}+\bar{p})'v - 4\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v + \delta p + \frac{2}{3}\bar{p}\nabla^2\Pi + (\bar{\rho}+\bar{p})\Phi. \tag{H.4}$$

Derivando la densidad relativa ($\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$)

$$\delta' = \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}\right)' = \frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}^2}\delta\rho, \tag{H.5}$$

usando la ecuación (H.3) y la conservación de energía del background

$$\rho' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p}), \tag{H.6}$$

se tiene

$$\delta' = -3\mathcal{H}\left(\delta + \frac{\delta p}{\bar{\rho}}\right) + (1+w)(\nabla^2 v + 3\Psi') + 3\mathcal{H}\delta(1+w),$$

donde se ha usado la ecuación de estado $\bar{p} = w\bar{\rho}$. Por lo tanto, la ecuación de conservación de energía queda reescrita

$$\delta' = (1+w)(\nabla^2 v + 3\Psi') + 3\mathcal{H}(w\delta - \frac{\delta p}{\bar{\rho}}). \tag{H.7}$$

Ahora, derivando la ecuación de estado

$$(\bar{p}+\bar{\rho})' = w'\bar{\rho} + \bar{\rho}'(1+w) = w'\bar{\rho} - 3\mathcal{H}\bar{\rho}(1+w)^2,$$

donde se ha usado (H.6).
De la ecuación (H.4) se tiene

$$v' = -\frac{w'}{1+w}v + 3\mathcal{H}(1+w)v - 4\mathcal{H}v + \frac{\delta p}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi,$$

quedando finalmente

$$v' = -\mathcal{H}(1-3w)v - \frac{w'}{1+w}v + \frac{\delta p}{\bar{\rho}(1+w)} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi, \tag{H.8}$$

la cual es la ecuación de conservación del momentum.

Apéndice I

Paquete de Mathematica

Needs[“xAct`xPand`”]

DefManifold[M, 4, {$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \lambda, \sigma$}]

DefMetric[-1, $g[-\alpha, -\beta]$, CD, {“;”, “CD”}, PrintAs $\rightarrow$ g];

DefMetricPerturbation[g, dg, ϵ];

SetSlicing[g, n, h, cd, {“|”, “∇”}, “FLFlat”]

VisualizeTensor[dg[LI[1], $-\mu, -\nu$]/.SplitMetric[g, dg, h, “NewtonGauge”], h]

MyToxPand[expr_, gauge_, order_]:=ToxPand[expr, dg, u, du, h, gauge, order];

MyToxPand[RicciScalarCD[], “NewtonGauge”, order]

MyEqsE = MyToxPand[EinsteinCD[$\mu, -\nu$], “NewtonGauge”, order]

DefTensor[$T[-\mu, -\nu]$, M]

$Dust = False;

IndexSet[$T[\alpha\_, \beta\_]$, (($\rho[u][]$ + If[$Dust, 0, $P[u][]$])$u[\alpha]u[\beta]$ + (If[$Dust, 0, $P[u][]$])$g[\alpha, \beta]$)]

PrintAs[Pu]^=P; PrintAs[ρu]^=“ρ”;

MyConEnergy = MyToxPand[CD[$-\mu$]@$T[\mu, -\nu]$, “NewtonGauge”, order]

ExtractComponents[ExtractOrder[$-$MyConEnergy, 0], h]

ExtractComponents[ExtractOrder[MyConEnergy, 1], h]

MyGR[$\mu\_, \nu\_$]:=EinsteinCD[μ, ν] $- 8\pi T[\mu, \nu]$

MyGRResult = MyToxPand[MyGR[$\mu, -\nu$], “NewtonGauge”, order]

PerfectFluidConstraint $=$ **MakeRule**[{ψ**h**[**LI**[1], **LI**[0]], ϕ**h**[**LI**[1], **LI**[0]]}]

AutomaticRules[ψ**h**, **PerfectFluidConstraint**]

MyGRResult2 $=$ **MyToxPand**[**MyGR**[μ, $-\nu$], **"NewtonGauge"**, **order**]

ExtractComponents[**ExtractOrder**[1/2**MyGRResult2ah**[]^2, 1], h]

Clear[V]

DefScalarFunction[V]

ConformalWeight[V'] $=$ 0;

DefScalarFunction[F]

ConformalWeight[F'] $=$ 0;

DefScalarFunction[ω]

ConformalWeight[ω'] $=$ 0;

DefTensor[**Teff**[$-\mu$, $-\nu$], M]

Teff[μ_, ν_]:=1/F[φ[]](**CD**[μ][φ[]]**CD**[ν][φ[]] $-$ 1/2g[μ, ν]**CD**[α][φ[]]**CD**[$-\alpha$][φ[]])+
1/F[φ[]](**CD**[μ]@**CD**[ν][F[φ[]]] $-$ g[μ, ν]**CD**[$-\alpha$]@**CD**[α][F[φ[]]] $-$ g[μ, ν]V[φ[]])

MyST[μ_, ν_]:=**EinsteinCD**[μ, ν] $-$ T[μ, ν]/F[φ[]] $-$ **Teff**[μ, ν]

MySTResult $=$ **MyToxPand**[**MyST**[μ, $-\nu$], **"NewtonGauge"**, **order**]

Si se quieren calcular las perturbaciones para BD partiendo de ST se usan las relaciones (2.82).

DefConstantSymbol[w]

F[φ[]] $=$ φ[]; ω[φ[]] $=$ w/φ[];

MyST[μ, ν]

MySTResult $=$ **MyToxPand**[**MyST**[μ, $-\nu$], **"NewtonGauge"**, **order**]

Bibliografía

[1] Clifford M. Will. “Was Einstein right?” In: *Annalen Phys.* 15 (2005). [Annalen Phys.518,19(2006)], pp. 19–33. arXiv: gr-qc/0504086 [gr-qc].

[2] Orfeu Bertolami, Jorge Paramos, and Slava G. Turyshev. “General theory of relativity: Will it survive the next decade?” In: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 349 (2008), pp. 27–74. arXiv: gr-qc/0602016 [gr-qc].

[3] H. Weyl. “A New Extension of Relativity Theory”. In: *Annalen Phys.* 59 (1919). [Annalen Phys.364,101(1919)], pp. 101–133.

[4] Amanda W. Peet and Joseph Polchinski. “UV-IR relations in AdS dynamics”. In: *Phys. Rev. D* 59 (6 Feb. 1999), p. 065011.

[5] Assaf Shomer. “A Pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity”. In: (2007). arXiv: 0709.3555 [hep-th].

[6] C. L. Bennett et al. “Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results”. In: 208, 20 (Oct. 2013), p. 20. arXiv: 1212.5225.

[7] Tamara M. Davis and David Parkinson. “Characterising Dark Energy through supernovae”. In: (2016). arXiv: 1610.09452 [astro-ph.CO].

[8] J. H. Oort. “The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems”. In: 6 (Aug. 1932). Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System, p. 249.

[9] Dragan Huterer and Michael S. Turner. “Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements”. In: *Phys. Rev.* D60 (1999), p. 081301. arXiv: astro-ph/9808133 [astro-ph].

[10] S. Weinberg. *Cosmology*. Cosmology. OUP Oxford, 2008.

[11] A.R. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2003.

[12] Benoit Famaey and Stacy McGaugh. “Challenges for CDM and MOND”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 437.1 (2013), p. 012001.

[13] C. Brans and R. H. Dicke. “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”. In: *Phys. Rev.* 124 (1961), pp. 925–935.

[14] Carl Brans. “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. II”. In: 125 (Mar. 1962), pp. 2194–2201.

[15] Hubert Goenner. “Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories”. In: *General Relativity and Gravitation* 44.8 (Aug. 2012), pp. 2077–2097.

[16] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. “f(R) Theories”. In: *Living Reviews in Relativity* 13.1 (June 2010), p. 3.

[17] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.

[18] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.

[19] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[20] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. “Action integrals and partition functions in quantum gravity”. In: *Phys. Rev. D* 15 (10 May 1977), pp. 2752–2756.

[21] S. W. Hawking and Gary T. Horowitz. “The Gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms”. In: *Class. Quant. Grav.* 13 (1996), pp. 1487–1498. arXiv: `gr-qc/9501014 [gr-qc]`.

[22] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.

[23] P. Jordan. “Relativistische Gravitationstheorie mit variabler Gravitationskonstante”. In: *Naturwissenschaften* 33 (Oct. 1946), pp. 250–251.

[24] Valerio Faraoni and Edgard Gunzig. “Einstein Frame or Jordan Frame?” In: *International Journal of Theoretical Physics* 38.1 (Jan. 1999), pp. 217–225.

[25] V. Faraoni. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 2004.

[26] E. Papantonopoulos. *Modifications of Einstein’s Theory of Gravity at Large Distances*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2014.

[27] Israel Quiros et al. “Brans–Dicke Galileon and the variational principle”. In: *Eur. J. Phys.* 37.5 (2016), p. 055605. arXiv: `1605.00326 [gr-qc]`.

[28] Antonio Padilla and Vishagan Sivanesan. “Boundary Terms and Junction Conditions for Generalized Scalar-Tensor Theories”. In: *JHEP* 08 (2012), p. 122. arXiv: `1206.1258 [gr-qc]`.

[29] Ethan Dyer and Kurt Hinterbichler. “Boundary Terms, Variational Principles and Higher Derivative Modified Gravity”. In: *Phys. Rev.* D79 (2009), p. 024028. arXiv: `0809.4033 [gr-qc]`.

[30] S. Capozziello and V. Faraoni. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 2010.

[31] Valerio Faraoni. “The omega —> infinity limit of Brans Dicke theory”. In: *Phys. Lett.* A245 (1998), pp. 26–30. arXiv: `gr-qc/9805057 [gr-qc]`.

[32] Gregory Walter Horndeski. “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 10.6 (Sept. 1974), pp. 363–384. ISSN: 1572-9575.

[33] Yasunori Fujii and Kei-ichi Maeda. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.

[34] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973.

[35] Kretschmann E. “Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie.” In: *Ann. Phys. (Leipzig)* 53 (1917), 575–614.

[36] K. S. Stelle. “Classical gravity with higher derivatives”. In: *General Relativity and Gravitation* 9.4 (Apr. 1978), pp. 353–371. ISSN: 1572-9532.

[37] David Lovelock. “The Einstein Tensor and Its Generalizations”. In: *Journal of Mathematical Physics* 12.3 (1971), pp. 498–501. eprint: `https://doi.org/10.1063/1.1665613`.

[38] Alejandro Guarnizo, Leonardo Castaneda, and Juan M. Tejeiro. “Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism”. In: *Gen. Rel. Grav.* 42 (2010), pp. 2713–2728. arXiv: 1002.0617 [gr-qc].

[39] Simon Arthur Woolliams. “Higher Derivative Theories of Gravity”. MA thesis. Imperial College London, 2013.

[40] Tonguc Rador. “Acceleration of the universe via f(R) gravities and the stability of extra dimensions”. In: *Phys. Rev.* D75 (2007), p. 064033. arXiv: hep-th/0701267 [hep-th].

[41] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003.

[42] J.A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge Astrophysics. Cambridge University Press, 1999.

[43] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972.

[44] Martin Bucher. “Status of CMB observations in 2015”. In: *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* 43 (2016), p. 1660188. arXiv: 1606.03375 [astro-ph.CO].

[45] P.J. Steinhardt et al. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.

[46] Francisco S. N. Lobo. “The Dark side of gravity: Modified theories of gravity”. In: 173-204 (2009), Research Signpost, ISBN 978–81–308–0341–8. arXiv: 0807.1640 [gr-qc].

[47] M. Sharif and S. Waheed. “Cosmic Acceleration and Brans-Dicke Theory”. In: *J. Exp. Theor. Phys.* 115 (2012), pp. 599–613. arXiv: 1303.2109 [gr-qc].

[48] Claudia Moreno González. *Accelerated cosmic expansion*. (Astrophysics and space science proceedings. New York: Springer, 2014.

[49] Yasunori Fujii. “Accelerating Universe and the Scalar-Tensor Theory”. In: *Entropy* 14.10 (2012), pp. 1997–2035. ISSN: 1099-4300.

[50] R. Gannouji et al. “Scalar-Tensor Dark Energy Models”. In: *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories. Proceedings, 11th Marcel Grossmann Meeting, MG11, Berlin, Germany, July 23-29, 2006. Pt. A-C*. 2007, pp. 1794–1796. arXiv: astro-ph/0701650 [astro-ph].

[51] Alejandro Guarnizo. “Modelos Cosmológicos en teorías de gravedad modificada f(R)”. MA thesis. Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[52] Timothy Clifton and Peter K. S. Dunsby. “On the emergence of accelerating cosmic expansion in $f(R)$ theories of gravity”. In: *Phys. Rev. D* 91 (10 May 2015), p. 103528.

[53] Masaaki Morita and Hirotaka Takahashi. “Reconstructing f(R) modified gravity with dark energy parametrization”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 490.1 (2014), p. 012087.

[54] Karim A. Malik and David R. Matravers. “A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology”. In: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), p. 193001. arXiv: 0804.3276 [astro-ph].

[55] Bo Wang and Yang Zhang. “Second-order cosmological perturbations. I. Produced by scalar-scalar coupling in synchronous gauge”. In: *Phys. Rev.* D96.10 (2017), p. 103522. arXiv: 1710.06641 [gr-qc].

[56] Lotfi Boubekeur et al. "Action approach to cosmological perturbations: the 2nd order metric in matter dominance". In: 8 (Aug. 2008).

[57] Hannu Kurki-Suonio. *Cosmological Perturbation Theory, Part 1*. Lecture notes for a course of cosmological perturbation theory given at the university of Helsinki 2015. 2015.

[58] Karim A. Malik and David Wands. "Cosmological perturbations". In: *Phys. Rept.* 475 (2009), pp. 1–51. arXiv: 0809.4944 [astro-ph].

[59] James M. Bardeen. "Gauge-invariant cosmological perturbations". In: *Phys. Rev. D* 22 (8 Oct. 1980), pp. 1882–1905.

[60] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. "Theory of cosmological perturbations". In: *Phys. Rept* 215 (June 1992), pp. 203–333.

[61] J M Stewart. "Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models". In: *Classical and Quantum Gravity* 7.7 (1990), p. 1169.

[62] Hannu Kurki-Suonio. *Cosmological Perturbation Theory, Part 2*. Lecture notes for a course of cosmological perturbation theory given at the university of Helsinki 2015. 2015.

[63] Cyril Pitrou, Xavier Roy, and Obinna Umeh. "xPand: An algorithm for perturbing homogeneous cosmologies". In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), p. 165002. arXiv: 1302.6174 [astro-ph.CO].

[64] B. Boisseau et al. "Reconstruction of a scalar tensor theory of gravity in an accelerating universe". In: *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), p. 2236. arXiv: gr-qc/0001066 [gr-qc].

[65] N. Nazari-Pooya et al. "Growth of spherical overdensities in scalar-tensor cosmologies". In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 458.4 (2016), pp. 3795–3807. arXiv: 1601.04593 [gr-qc].

[66] Mu-Chen Chiu et al. "Cosmological perturbations and quasistatic assumption in f(R) theories". In: *Phys. Rev.* D92.10 (2015), p. 103514. arXiv: 1505.03323 [gr-qc].

[67] Shinji Tsujikawa. "Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy". In: *Phys. Rev.* D76 (2007), p. 023514. arXiv: 0705.1032 [astro-ph].

[68] J C Bueno Sánchez and L Perivolaropoulos. "Dark energy and matter perturbations in scalar-tensor theories of gravity". In: *Journal of Physics: Conference Series* 283.1 (2011), p. 012006.

[69] Sebastian Sierra. "Parámetros de anisotropía en teorías f(R)". MA thesis. Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[70] Alexei A. Starobinsky. "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity". In: *Phys. Lett.* 91B (1980), pp. 99–102.

[71] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. "Models of f(R) Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests". In: *Phys. Rev.* D76 (2007), p. 064004. arXiv: 0705.1158 [astro-ph].

[72] Viatcheslav F. Mukhanov and G. V. Chibisov. "Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe". In: *JETP Lett.* 33 (1981). [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.33,549(1981)], pp. 532–535.

[73] A. A. Starobinskii. "The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy". In: *Soviet Astronomy Letters* 9 (June 1983), pp. 302–304.

[74] P. A. R. Ade et al. "Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation". In: *Astron. Astrophys.* 571 (2014), A22. arXiv: `1303.5082 [astro-ph.CO]`.

[75] Michal Artymowski, Zygmunt Lalak, and Marek Lewicki. "Inflationary scenarios in Starobinsky model with higher order corrections". In: *JCAP* 1506 (2015), p. 032. arXiv: `1502.01371 [hep-th]`.

[76] M. Kowalski et al. "Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets". In: *Astrophys. J.* 686 (2008), pp. 749–778. arXiv: `0804.4142 [astro-ph]`.

[77] Joan Simon, Licia Verde, and Raul Jimenez. "Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential". In: *Phys. Rev.* D71 (2005), p. 123001. arXiv: `astro-ph/0412269 [astro-ph]`.

[78] Daniel J. Eisenstein, Hee-jong Seo, and Martin J. White. "On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter". In: *Astrophys. J.* 664 (2007), pp. 660–674. arXiv: `astro-ph/0604361 [astro-ph]`.

[79] Michael Kopp. "Models of large-scale structure formation in cosmology". PhD thesis. Ludwig-Maximilians-Universität München, 2014.

[80] B. Jain, V. Vikram, and J. Sakstein. "Astrophysical Tests of Modified Gravity: Constraints from Distance Indicators in the Nearby Universe". In: *apj* 779, 39 (Dec. 2013), p. 39. arXiv: `1204.6044`.